Chaos e Complessità

Il Chaos *Deterministico*

Libera elaborazione da presentazioni di lavori di Studenti del Dottorato CMCC

Sebastian Candiago
Delia Segato

PhD Programme in Science and Management of Climate Change

Università Ca'Foscari Venezia

Outline

TEORIA del CHAOS

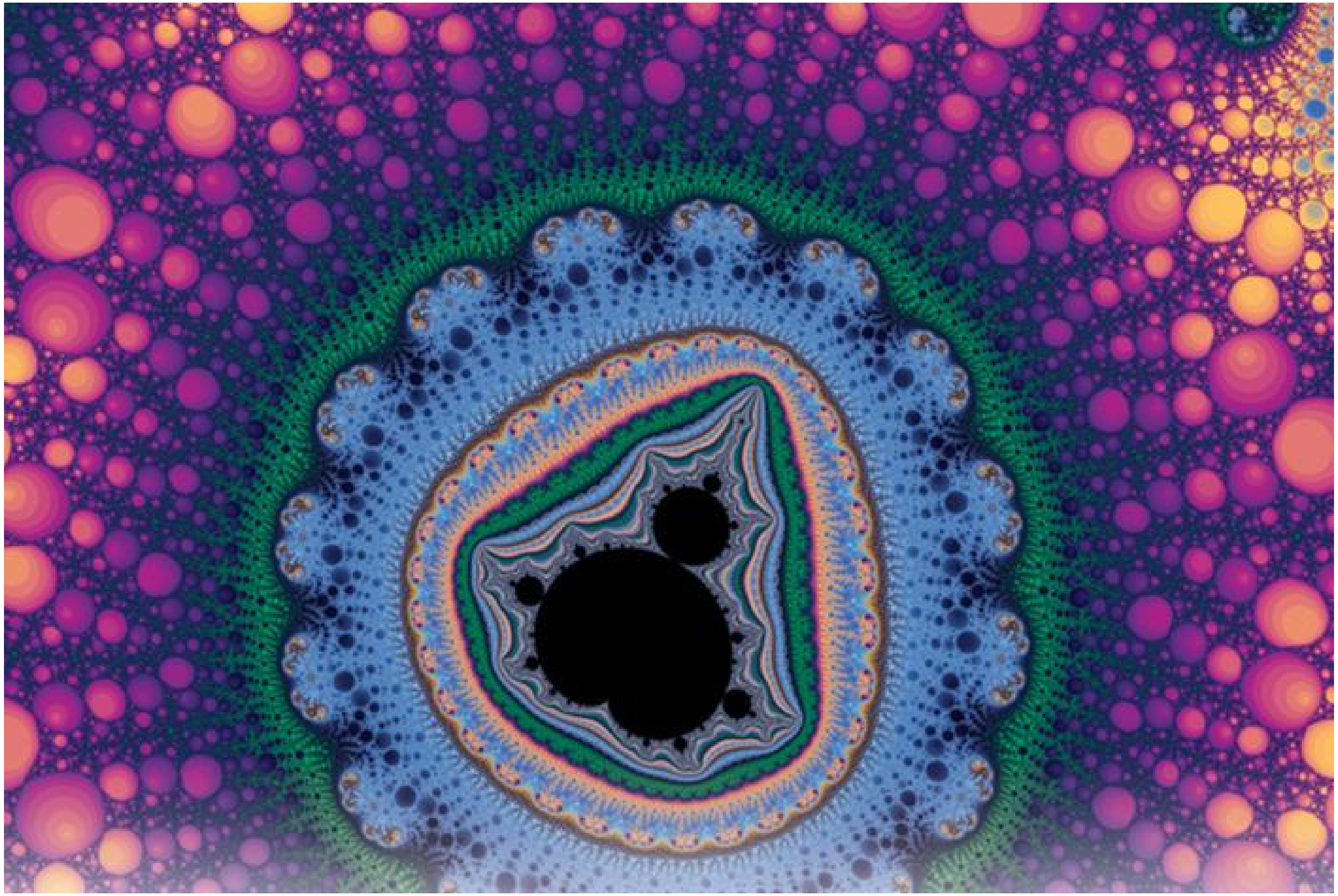
1. Introduzione… cosa intendiamo per *chaos*? (deterministico…)
2. Dinamiche ed equazioni…
3. La mappa logistica….
4. Il diagramma di *biforcazione*
5. *Frattali*… figure magiche!

Outline

MAGRITTE *La terra dei miracoli* (1964)

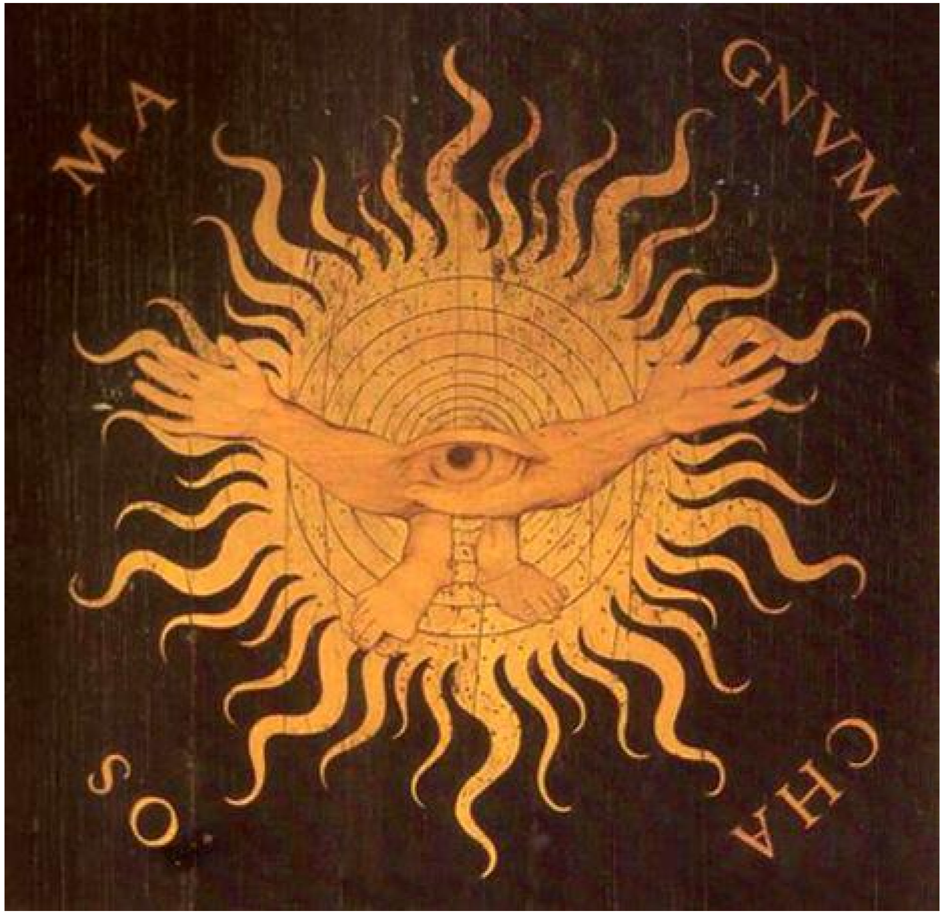
Outline

Figura *frattale*……



Outline

Il *chaos primordiale* ….



.. . dalle tarsie del coro di Santa Maria Maggiore (Bergamo)…

Outline

Ἦ τοι μὲν πρώτιστα Χάος γένετ᾽, αὐτὰρ ἔπειτα Γαῖ᾽ εὐρύστερνος, πάντων ἕδος ἀσφαλὲς αἰεὶ [ἀθανάτων, οἳ ἔχουσι κάρη νιφόεντος Ὀλύμπου, …………………………………………………

[Esiodo, Teogonia….]

Dunque, per primo fu il Chaos, ….
e poi Gaia dall'ampio petto, sede sicura per sempre di tuttigli immortali che tengono le vette dell'Olimpo nevoso, e Tartaro nebbioso nei recessi della terra dalle ampie strade…….

Outline

Cosa intendiamo qui con il termine *chaos*?

E cosa c'è di comune con le immagini precedenti?

Una *Teoria Matematica* del chaos?

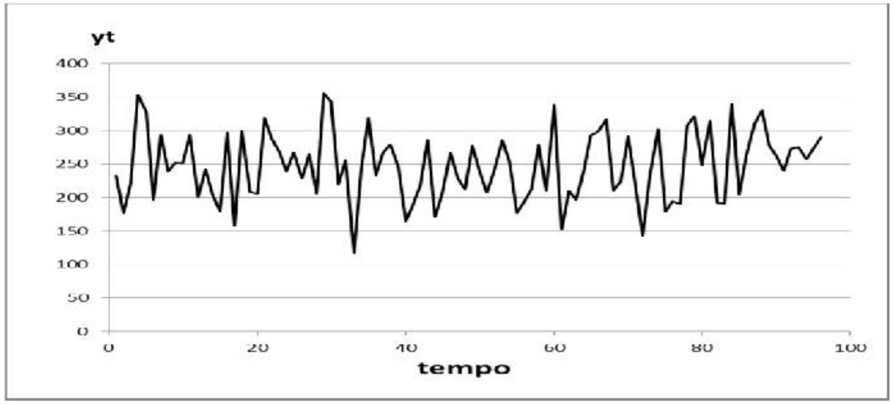
Parentela (insospettabile…) tra ***chaos*** e ***frattali***….

Un po' di storia….

…ma prima….

1. Introduzione

Serie storica (es.: quotazione giornaliera di un bene



Realizzazione di un processo stocastico (casuale)…. Oscillazioni non prevedibili (non regolari) ma di ampiezza limitata

DETERMINISMO: abbiamo conoscenza completa del fenomeno

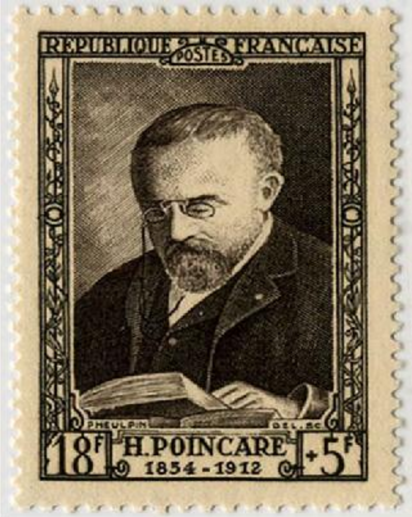
FUNZIONE Y=F(X) .. Ci dice tutto!

Nessuna componente erratica…

1. Introduzione

Essenza del CHAOS DETERMINISTICO

H. Poincare

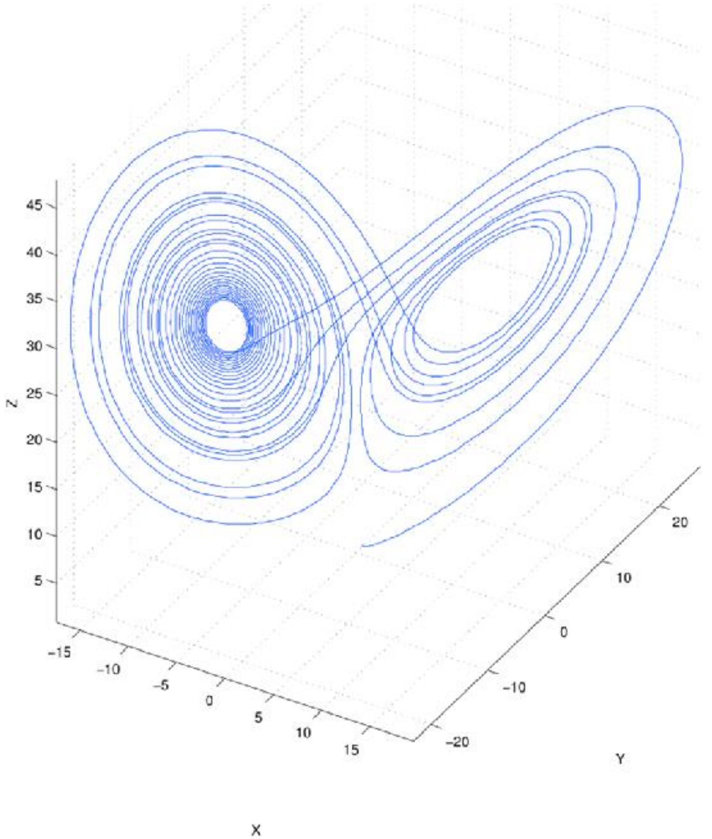


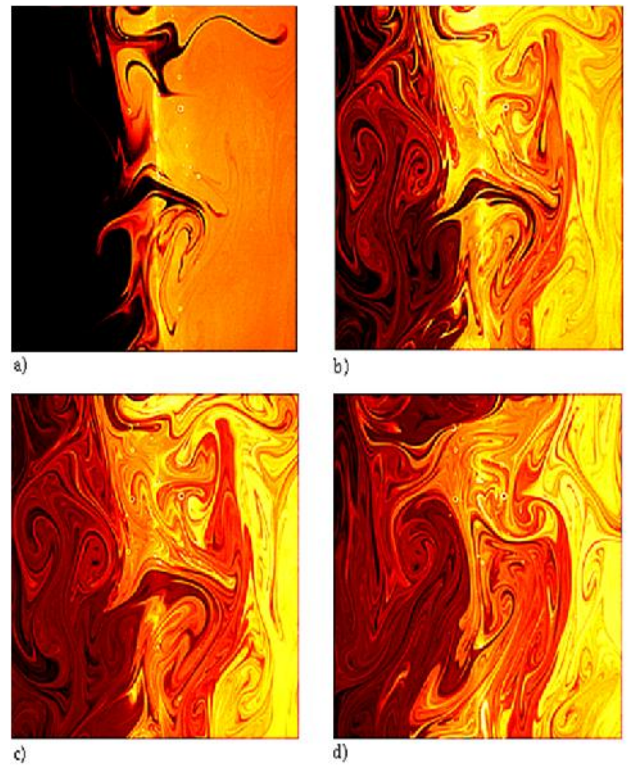
- L'evoluzione di un sistema dinamico è completamente determinata dalle **condizioni iniziali**
- Ma tale evoluzione non può essere calcolata (*predizione*) nel **lungo termine …**

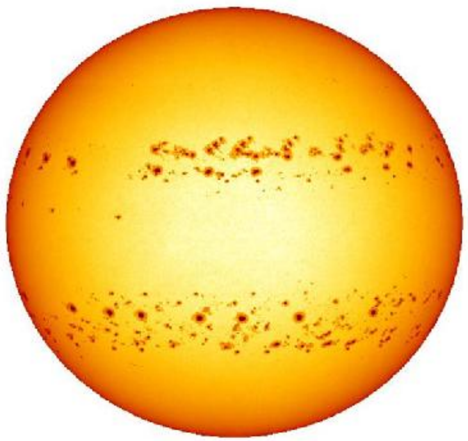
….piccole differenze nello stato iniziale possono condurre a grandi differenze nello stato finale

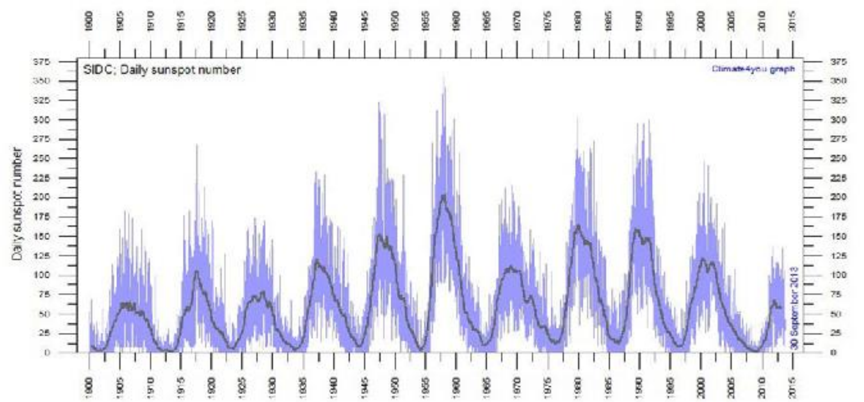
ALCUNI ESEMPI DI SISTEMI CAOTICI

- Il sistema solare (H. Poincare)
- Metereologia (E. N. Lorenz)
- Turbolenze nei fluidi (A. J. Libchaber)
- Attività solare (Parker)
- Crescita di una popolazione (May)


Z
X
Y


a)
b)
c)
d)




SIDC; Daily sunspot number
Climate4you graph
Daily sunspot number
30 September 2013

2. La mappa logistica

UN MODELLO DI CRESCITA

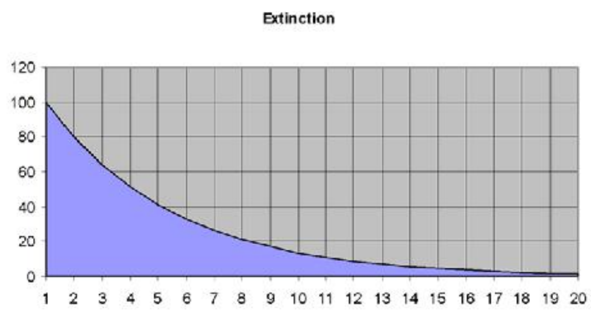
Popolazione di ***N*** individui che evolve anno dopo anno in base ad un tasso di crescita p (legge di Malthus):

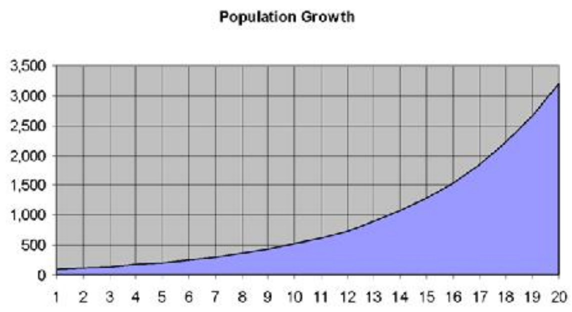
$$\boxed{N_{t+1} = p\, N_t}$$

N_t : popolazione al tempo t
N_{t+1} : popolazione al tempo t+1

Che succede per valori di p positivi?

p = 1 .. Nulla!
p > 1 la popolazione ***esplode***
p < 1 **estinzione**

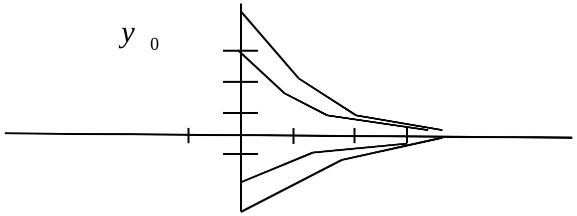




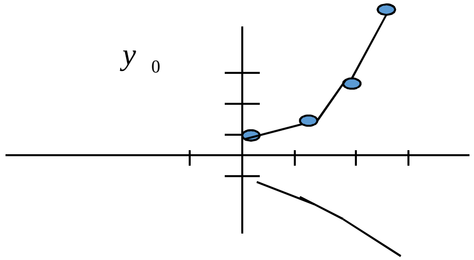
2. La mappa logistica

Un’equazione LINEARE x(t+1)=ax(t) può avere SOLO questi comportamenti….

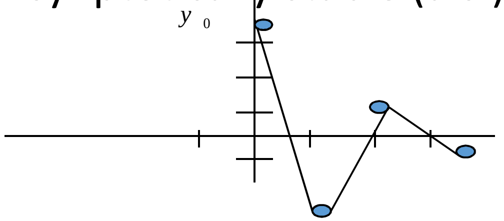
Asymptotically stable (a.s.)



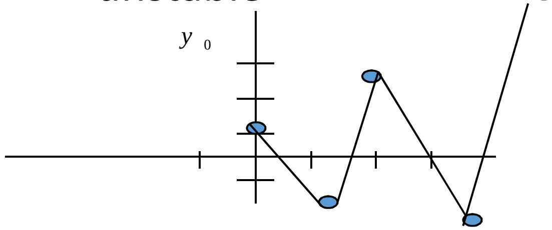
unstable



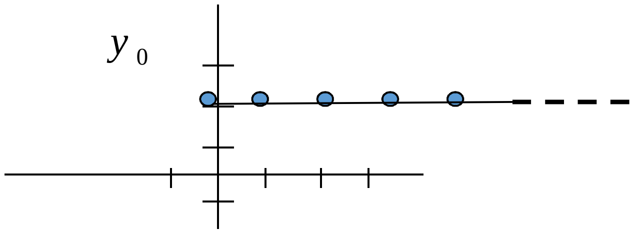
Asynptotically stable (a.s.)



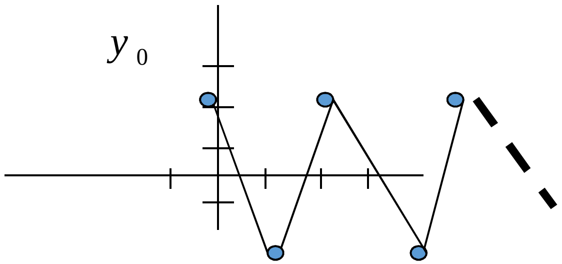
unstable



Simply stable (s.s.)



Simply stable (s.s.)



2. La mappa logistica

Ma le cose non sono così semplici… nella realtà modelli lineari sono rari anche accettando molte ipotesi riduttive….

Ad esempio anche nel modello di DINAMICHE DI POPOLAZIONI occorre introdurre un qualche fattore limitante…

2. La mappa logistica

Limiti alla crescita dovuti a vincoli sulle risorse disponibili. Il **tasso di crescita netto** dipende dal termine:

$$\frac{k-N}{k}$$

Capacità portante

$$\boxed{N_{t+1} = N_t + p \cdot \frac{k-N_t}{k} N_t}$$

$$\boxed{N_{t+1} = (1+p) \cdot N_t - \frac{p}{k} \cdot N_t^2}$$

2. La mappa logistica

$$\boxed{N_{t+1} = (1+p)\cdot N_t - \frac{p}{k}\cdot N_t^2}$$

Tale espressione dopo qualche (noiosissimo!) passaggio algebrico, si trasforma nella seguente equazione *logistica*:

$$\boxed{f(x)=rx(1-x)}$$

NOTA: si tratta dell'equazione di una semplice parabola passante per l'origine e con la concavità verso il basso…!
L'equazione logistica rappresenta molti fenomeni del mondo reale

Se $0 \leq r \leq 4$ the *mappa* è ***invariante*** in [0,1]

2. La mappa logistica

Altro esempio: capitalizzazione composta

$$\boxed{C_{t+1} = (1+i)\, C_t}$$

Se inseriamo una tassa più che proporzionale…

$$\boxed{C_{t+1} = (1+i)\, C_t - kC^2_t}$$

2. La mappa logistica

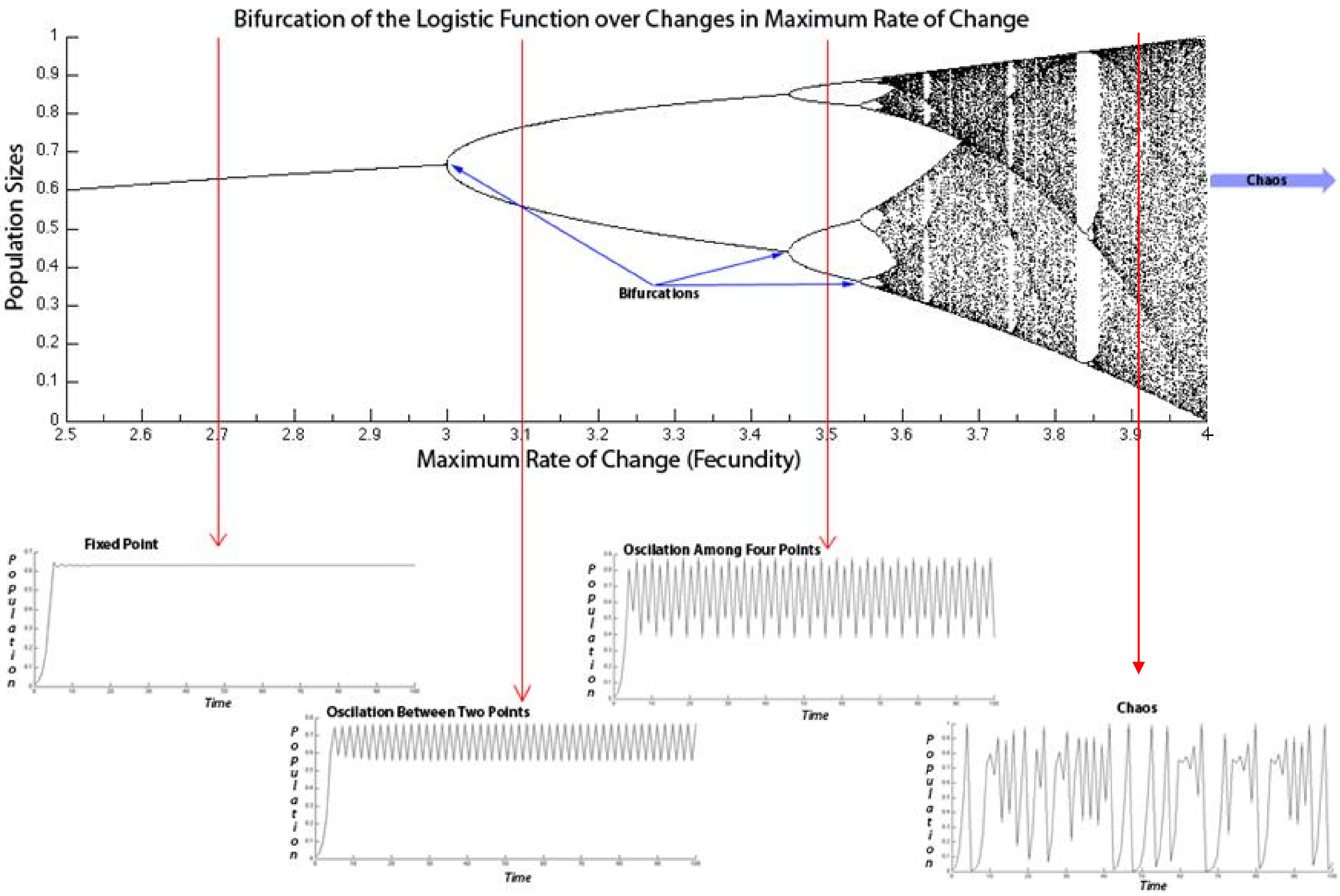
Vediamo alcune simulazioni…..

Partendo da alcune condizioni iniziali…

……………come *evolve* la variabile?

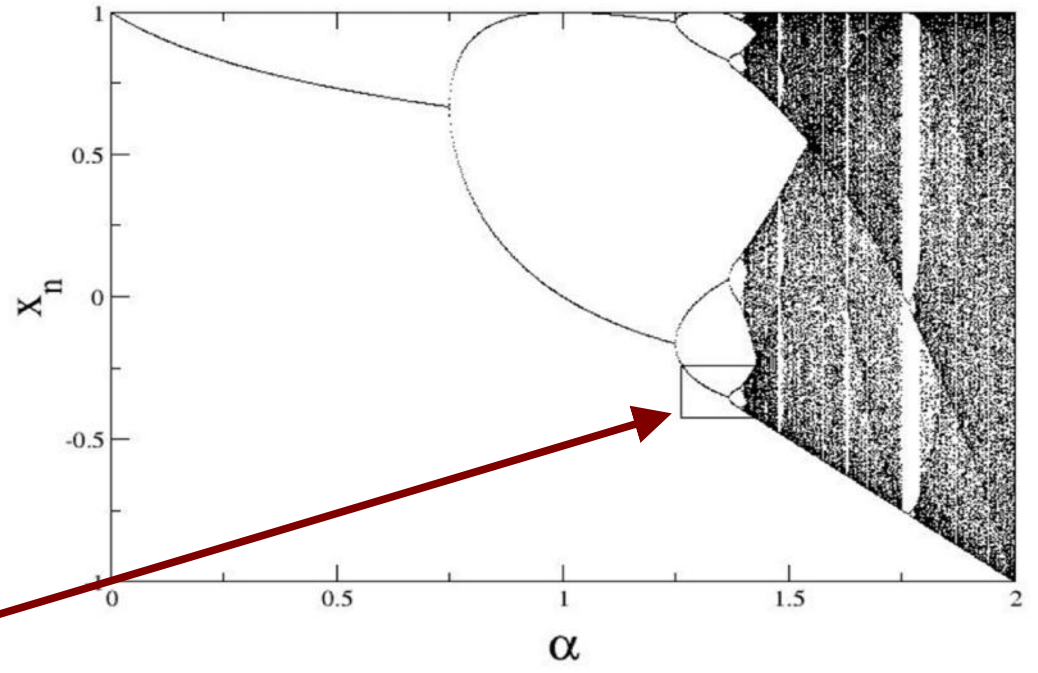
Cosa succede se ripetiamo tali simulazioni
al variare del parametro?

3. Il diagramma di biforcazione



3. Il diagramma di biforcazione

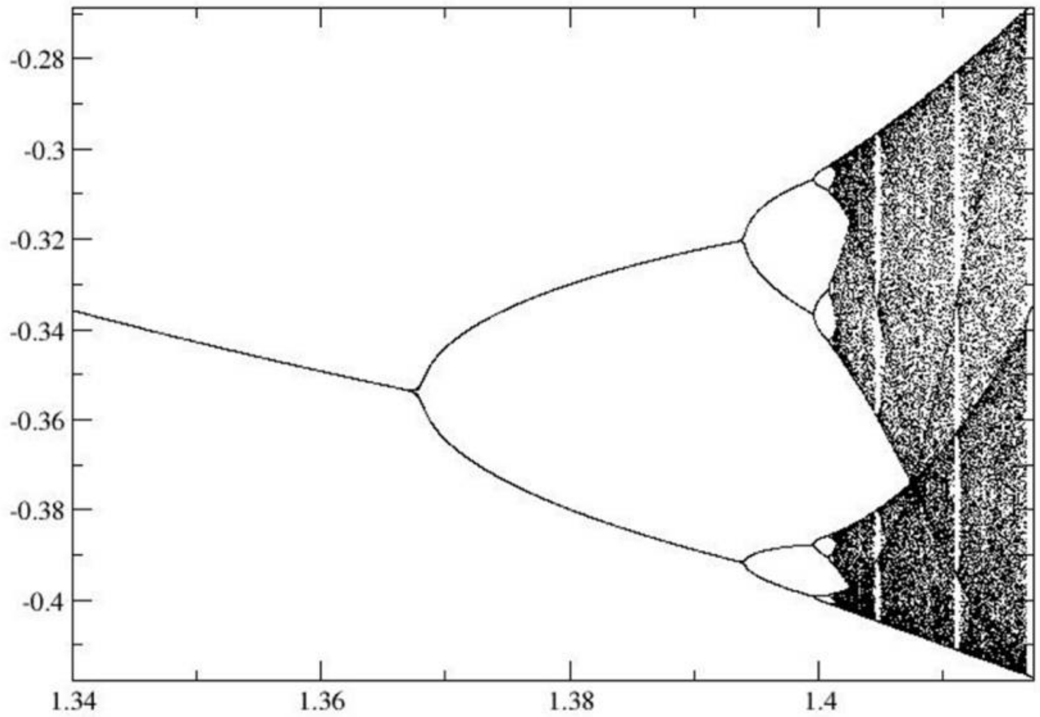
Cos’ha di speciale?
Diamoci un’occhiata a livello micro….



Allarghiamo
quest’ area…

3. Il diagramma di biforcazione

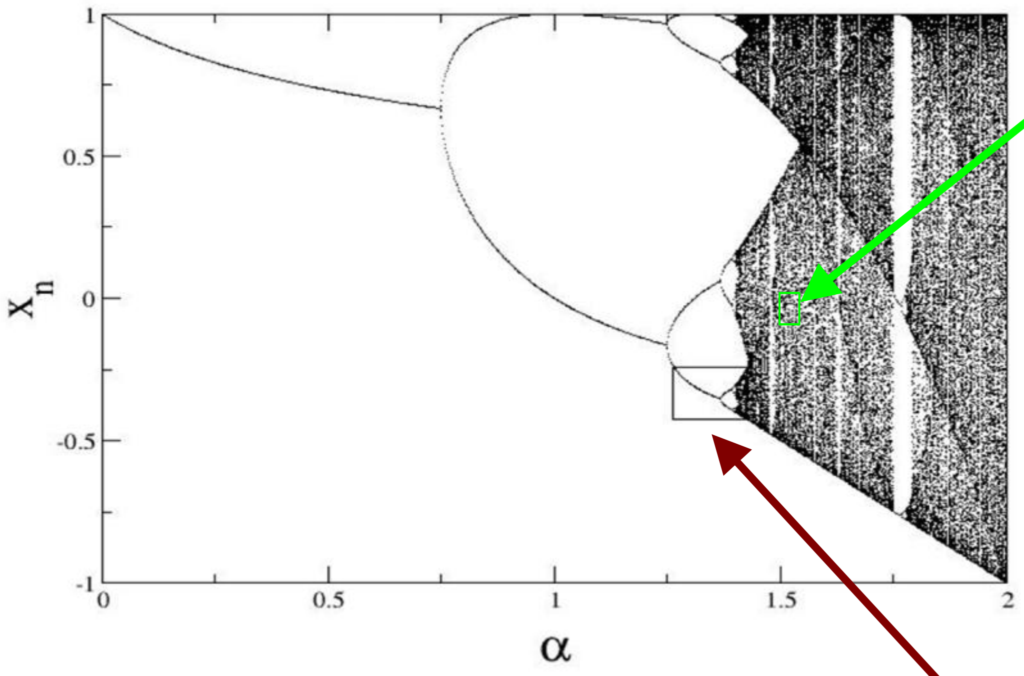
Wow! Visto al “microscopio” sembra lo stesso!



E questo accade qualsiasi sia l’area che cerchiamo di allargare….

3. Il diagramma di biforcazione

Ora allarghiamo un'area più piccola ancora…..



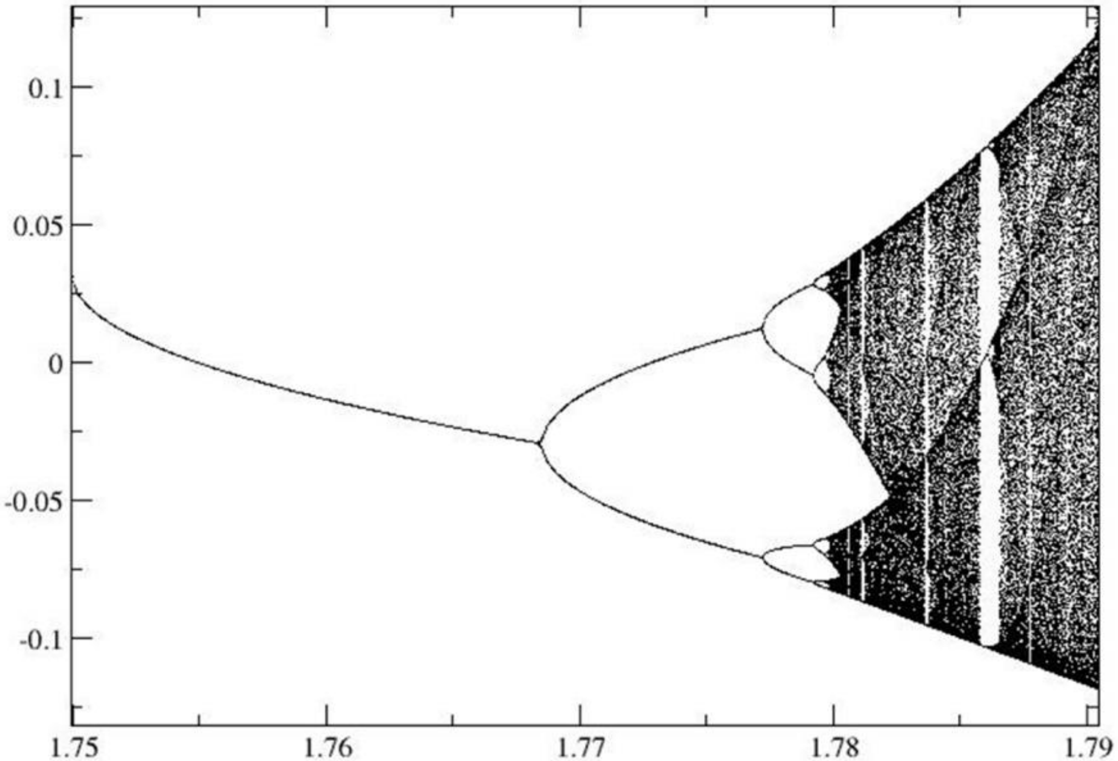
Ora allarghiamo quest' area

Difficile da visualizzare…

Questa è l'area che abbiamo allargato prima.

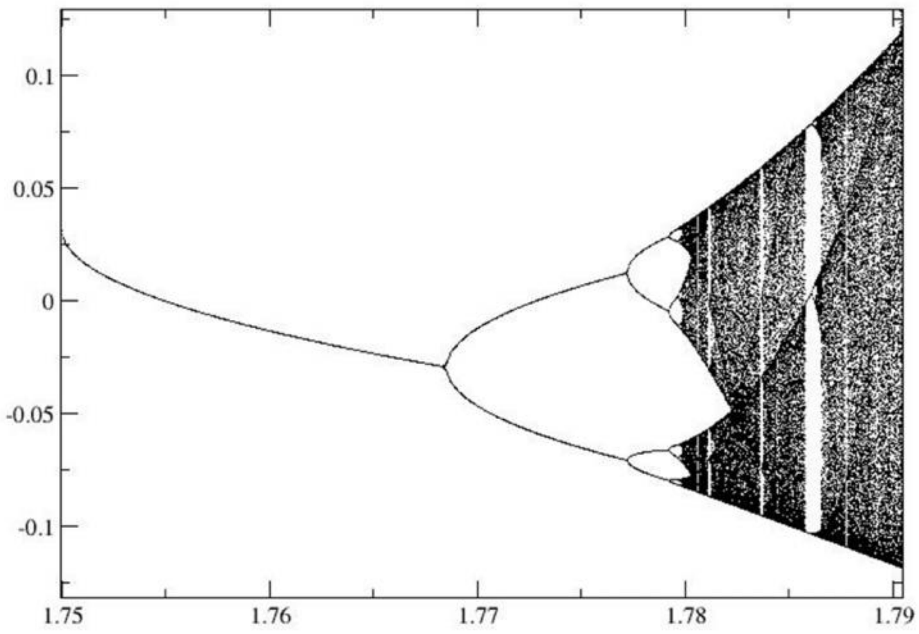
3. Il diagramma di biforcazione

Ancora lo stesso!



4. Frattali

Che risultato curiosissimo! La mappa logistica ripete sè stessa ad ogni scala via via sempre più piccola….



C'è proprio una struttura frattale nascosta…

Cosa sono i frattali?

Legame apparentemente curioso con i sistemi dinamici….

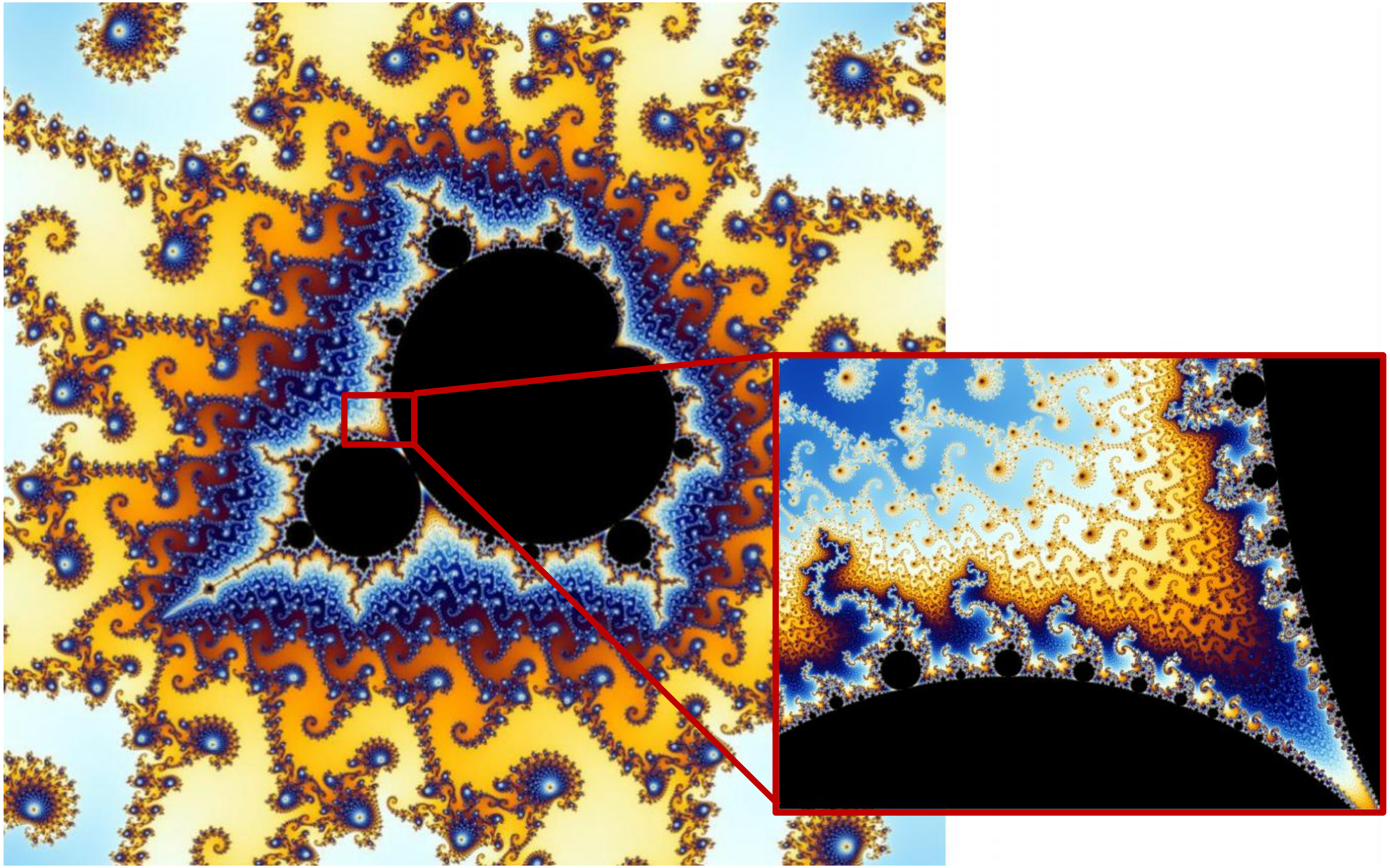
Caratteristiche:

- Si tratta di oggetti geometrici **auto-similari** .. Divisibili infinite volte in parti sempre più piccole ma che riflettono le stesse proprietà geometriche

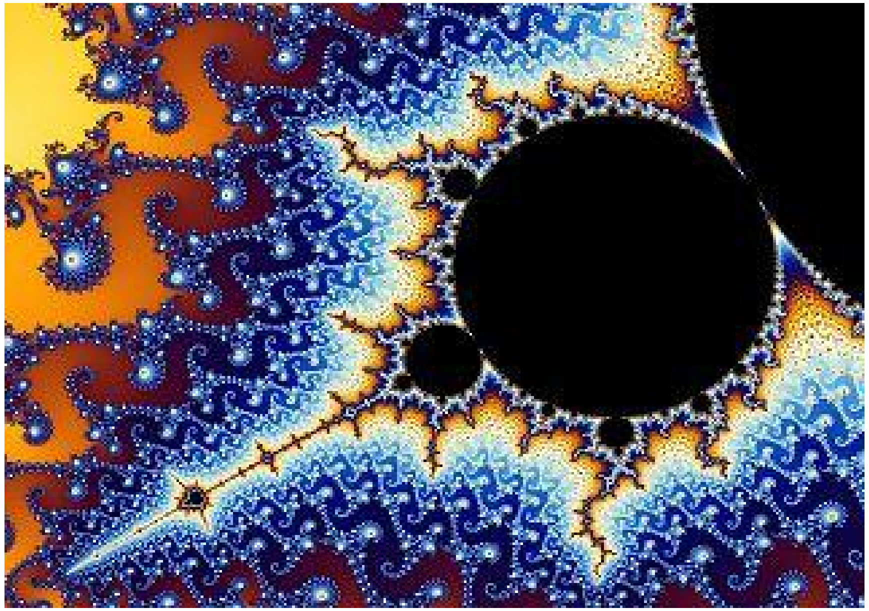
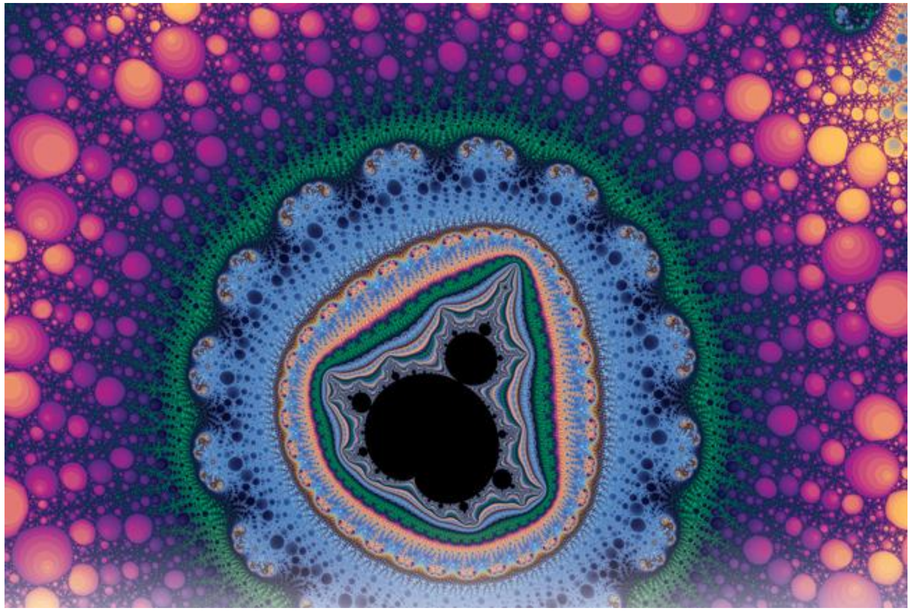
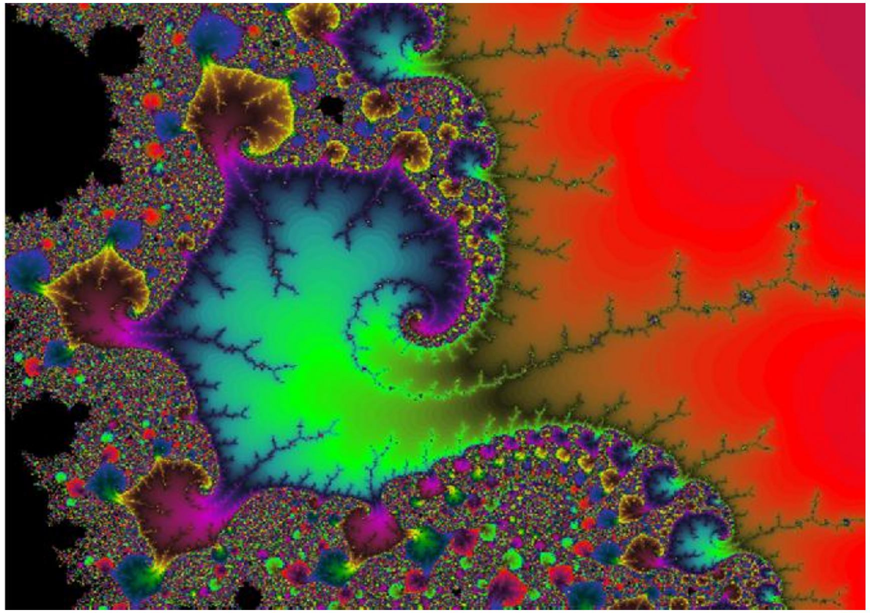
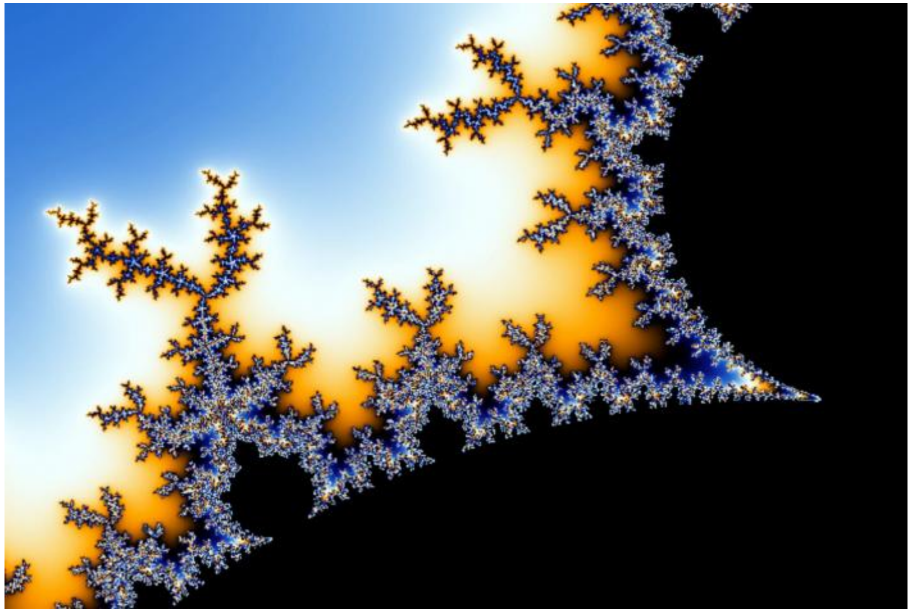
- Possono essere costruiti ripetendo un semplice processo (ad es. iterando una mappa dinamica in una sola dimensione).

4. Frattali

Un ingrandimento di una figura frattale….



4. Frattali

Legame tra insiemi frattale e complessità (Chaos Theory)…..

Un sistema complesso ha dimensione frattale… è caratterizzato da autoriproduzione in scala micro di andamenti osservati su scala macro….

... Proprio come la zigrinatura di una foglia…

.. Od un insieme di arterie che si diramano seguendo un andamento simile su scala più piccola….

Curiosamente infine….

Il Chaos è… VITA!

La complessità emerge nei sistemi vitali… irregolarità si osservano di continuo nei sistemi viventi

Ad esempio, la serie storica della frequenza cardiaca; la frequenza picco-picco è irregolare pur se tale irregolarità risulta contenuta. Non appena la sequenza si avvicina alla regolarità (frequenza costante)… sintomo di qualche patologia!

Chaos **DETERMINISTICO**….

Teoria (matematica) dei sistemi *complessi*

- ATTRATTORE STRANO (*Strange Attractor*)
- Biforcazioni (*bifurcations*)
- Impossibilità di predire il futuro anche partendo da un’equazione semplice (logistica)
- Traiettorie caotiche (ma DETERMINISTICHE): indistinguibili dalla realizzazione di un processo stazionario

Il nostro mondo è continuamente *immerso* in dinamiche *caotiche*….

Applicazioni in ingegneria, fisica….

.. Ma anche biologia(crescita di popolazioni) , fisiologia (omeostasi)

.. Medicina (battiti cardiaci, andamento pressorio…)

.. . Economia, scienze sociali ….

Economia:

Serie dei prezzi generata da un semplice modello di domanda-offerta non lineare con curva di domanda non monotòna [Hommes]……

1. Sostenibilità dello sviluppo turistico
2. Interazione tra popolazioni (competizione, predazione,…)
3. Modelli di infezioni batteriche
4. Il mercato della droga
5. Analisi del bipolarismo
6. Corruzione della classe politica
7. Produzione e creatività
8. Oscillazioni e cicli storici (interazioni tra gruppi sociali)
9. Relazioni d’amore (vedi film di Francois Truffaut «Jules et Jim»)

Mappa caotica.. Impossibiltà di prevederne il valore anche se il meccanismo generatore è perfettamente noto (nessuna componente aleatoria)…. Impossibilità della conoscenza relativamente all'evoluzione di un sistema deterministico….

Sembra strano ma è così!!

Abbiamo iniziato con Esiodo… e terminiamo con…

Φεῦ φεῦ, φρονεῖν ὡς δεινὸν ἔνθα μὴ τέλη λύῃ φρονοῦντι…….

Sofocle! (Edipo Re)

GRAZIE PER LA GENTILE ATTENZIONE…..

References

Prof. Giove's presentations for the course of "Mathematical Methods for CCA", PhD course in SMCC, Ca' Foscari University of Venice (2018).

G. I. Bischi (2008). Caos deterministico: un'introduzione operativa. Nuova Secondaria, n° 3, anno XXVI.

A. Ashley, J. Hicken. (2016). Sensitivity Analysis of Chaotic Problems using a Fourier Approximation of the Least-Squares Adjoint. 10.2514/6.2016-4409.

D. Van Den Berg. Discrete dynamical system and the logistic map: an easy introduction. Hogeschool van Amsterdam, Riken brain science institute (retrieved here on 03.11.2018)

Blanchard, P.; Devaney, R. L.; Hall, G. R. (2006). *Differential Equations*. London: Thompson. pp. 96–111. ISBN 0-495-01265-3.

Strogatz, Steven H. (Steven Henry) author. *Nonlinear Dynamics and Chaos : with Applications to Physics, Biology, Chemistry, and Engineering.* Boulder, CO :Westview Press, a member of the Perseus Books Group, 2015.

References

Websites and images:

For the sunspot cycle image: https://www.cosmos.esa.int/web/cesar/rotation-period-and-sunspot-activity

https://it.wikipedia.org/

R CODE:

For the bifurcation diagram: adapted from
https://www.youtube.com/watch?v=dPdlzfRdfxs

For the Mandelbrot's set: taken from

https://leonjessen.wordpress.com/2015/11/03/plot-the-mandelbrot-set-using-r/