

# Scelte sociali e paradossi della democrazia

Mathesis Venezia

---

Marta Cardin

15 marzo 2019

Il problema di modellizzare e quindi rappresentare le preferenze di un decisore viene affrontato da punti di vista diversi da molte discipline (logica, filosofia, psicologia , economia, matematica...).

Nella rappresentazione di un problema decisionale si possono schematicamente distinguere diversi punti di vista:

- modellizzazione delle preferenze effettivamente espresse in situazioni concrete,
- elaborazione di criteri di scelta razionale,
- costruzione di metodi per pervenire ad una scelta.

## Scelte razionali

- Decisioni individuali razionali  $\Rightarrow$  Teoria delle Decisioni
- Decisioni razionali in cui interagiscono più decisori  $\Rightarrow$  Teoria dei Giochi
- Decisioni razionali collettive  $\Rightarrow$  Teoria della Scelta Sociale.

Un agente è **razionale** quando ha degli obiettivi chiari, ragiona sulle conseguenze delle proprie azioni e massimizza il proprio interesse personale.

## Scelte sociali

- Un buon sistema elettorale è essenziale per la vita democratica.
- Il diritto/dovere del voto è giustamente considerato uno dei cardini della società democratica, ma da solo il diritto voto non garantisce che l' esito delle urne rispecchi la volontà dei singoli individui.
- Esiste il metodo migliore?
- Esiste una vera e propria teoria (matematica) che riguarda il metodo di voto.

- Qual il miglior sistema di voto? Vedremo che molto dipende dalla situazione e dalle proprietà che si vogliono avere. Lo studio delle scelte da parte di gruppi ovvero la teoria della scelta sociale, cerca di capire in che modo le diverse regole influiscano sugli esiti, e quanto queste regole soddisfino alcuni criteri.
- Gli errori sistematici e le limitazioni di ogni metodo sono sottovalutati.
- Possiamo scegliere un buon prodotto con l'aiuto del nostro social network, di esperti, recensioni di riviste, scale di valutazione e stelle su una guida. Ma ogni persona pondera le caratteristiche di un prodotto in modo diverso....
- Problemi simili sorgono a ogni livello della società .

## Scelte sociali: paradossi

Un insieme di individui deve votare si/no su 3 proposte.

Ecco i risultati:

| SSS | SSN | SNS | SNN | NSS | NSN | NNS | NNN |
|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 1   | 1   | 1   | 3   | 1   | 3   | 3   | 0   |

Se si segue il criterio della maggioranza vince il no per tutte le proposte scelta che non ha fatto nessuno dei decisori coinvolti !

## Paradosso di Ascombe

|             | Prima proposta | Seconda proposta | Terza proposta |
|-------------|----------------|------------------|----------------|
| Decisore 1  | SI             | SI               | NO             |
| Decisore 2  | NO             | NO               | NO             |
| Decisore 3  | NO             | SI               | SI             |
| Decisore 4  | SI             | NO               | SI             |
| Decisore 5  | SI             | NO               | SI             |
| Maggioranza | SI             | NO               | SI             |

La maggioranza dei decisori **NON** approva il responso della maggioranza sulla maggioranza delle proposte.

## Regola della maggioranza paradosso di Condorcet

Consideriamo una preferenza collettiva con la regola della maggioranza sulla base delle scelte di tre diversi decisori tra gli elementi dell'insieme  $A = \{a, b, c\}$ . Se le preferenze dei tre decisori sono rappresentate dalle relazioni definite rispettivamente da:

$$a \succ_1 b \succ_1 c \quad b \succ_2 c \succ_2 a \quad c \succ_3 a \succ_3 b$$

Allora la preferenza collettiva è tale che

$$a \succ b, \quad b \succ c, \quad c \succ a$$

e quindi tale preferenza non risulta transitiva.



## Quale candidato dobbiamo scegliere?

| # votanti | 3 | 5 | 7 | 6 |
|-----------|---|---|---|---|
| migliore  | A | A | B | C |
|           | B | C | D | B |
|           | C | B | C | D |
| peggiore  | D | D | A | A |

- Non esiste un vincitore con il criterio della maggioranza assoluta
- La maggioranza relativa preferisce A
- Una maggioranza assoluta dei votanti giudica A il peggiore dei candidati
- B e C non sono giudicati il peggiore da nessun candidato
- Tutti i votanti preferiscono B a D

## Quale candidato dobbiamo scegliere?



Marquis de Condorcet (1743 -1794)



Jean Charles Borda (1733-1799)

## Quale candidato dobbiamo scegliere?

| # votanti | 3 | 5 | 7 | 6 |
|-----------|---|---|---|---|
| migliore  | A | A | B | C |
|           | B | C | D | B |
|           | C | B | C | D |
| peggiore  | D | D | A | A |

Nei confronti a coppie C vince rispetto ad ogni altro candidato (C è il **vincitore secondo Condorcet**)

## Quale candidato dobbiamo scegliere?

| # votanti | 3 | 5 | 7 | 6 |
|-----------|---|---|---|---|
| migliore  | A | A | B | C |
|           | B | C | D | B |
|           | C | B | C | D |
| peggiore  | D | D | A | A |

Con una regola a punteggio che tiene conto dell *ordinamento completo*  
B risulta il migliore (B è il **vincitore secondo Borda** )

## Quale candidato dobbiamo scegliere?

| # votanti | 3 | 5 | 7 | 6 |
|-----------|---|---|---|---|
| migliore  | A | A | B | C |
|           | B | C | D | B |
|           | C | B | C | D |
| peggiore  | D | D | A | A |

Conclusione: ci sono molti modi di rispondere alla domanda !

- Origine antica del dibattito sui metodi di votazione
- I primi risultati teorici si fanno risalire a Jean Antoine Nicolas Caritat (il Marchese Condorcet) e Jean Charles Borda
- La moderna “Teoria delle scelte sociali” nasce con la pubblicazione del testo “Social Choice and Individual Values” di Kenneth Arrow

## Un esempio

Sette amici,  $F_1, F_2, \dots, F_7$  stanno decidendo in quale ristorante cenare. Ci sono quattro possibilità,  $R_1, R_2, R_3, R_4$ . Viene richiesta ad ognuno la prima preferenza.

I risultati sono i seguenti.

- $F_1, F_2$  e  $F_3$  scelgono  $R_1$ , che ottiene così 3 voti
- $F_4$  e  $F_5$  votano entrambi per  $R_2$ , che ottiene 2 voti
- $F_6$  vota per  $R_3$ , che ottiene 1 voto
- $F_7$  vota per  $R_4$ , che ottiene 1 voto

Secondo il criterio della maggioranza vince  $R_1$ .

Non è chiaro se è il sistema migliore da applicare. Solo 3 su 7 scelgono  $R_1$ . Potrebbe essere che  $R_1$  non sia affatto una scelta accettabile per gli altri 4. Supponiamo quindi di fare un ballottaggio tra i due che hanno ottenuto più voti. Ovviamente si considera la seconda fase solo nel caso in cui nessun candidato abbia ottenuto la maggioranza assoluta. Nel nostro esempio dobbiamo considerare una seconda votazione con candidati  $R_1$  e  $R_2$ .

Irisultati sono i seguenti:

- $F_1, F_2$  e  $F_3$  votano tutti per  $R_1$ , che ottiene così 3 voti
- $F_4, F_5, F_6$  e  $F_7$  votano tutti per  $R_2$ , che ottiene così 4 voti

Con questo metodo la scelta migliore risulta  $R_2$ .



Risulta significativo notare che entrambi i metodi considerano in modo significativo le prime scelte.

Se volessimo far riferimento all'ordinamento completo delle preferenze e utilizzare il metodo di Borda dando quindi 4 punti alla prima preferenza, 3 alla seconda e così via dovremmo conoscere l'ordinamento di ciascun decisore.

Supponiamo che le preferenze siano rappresentate dalla seguente tabella:

|       | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_6$ | $F_7$ | Totale |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $R_1$ | 4     | 4     | 4     | 1     | 1     | 1     | 1     | 16     |
| $R_2$ | 1     | 3     | 3     | 4     | 4     | 2     | 2     | 19     |
| $R_3$ | 3     | 2     | 2     | 3     | 3     | 4     | 3     | 20     |
| $R_4$ | 2     | 1     | 1     | 2     | 2     | 3     | 4     | 15     |

Con il metodo di Borda l'opzione migliore risulta  $R_3$ .

Possiamo però notare che quello di cui non si tiene conto quando si utilizza il metodo di Borda è l'intensità delle preferenze.

Come possiamo misurarla ?

Per esempio prevedendo che ogni decisore possa esprimere un punteggio da 0 a 10 per ogni opzione tenendo conto appunto dell'intensità delle preferenze

Metodi di questo tipo vengono usati nelle competizioni sportive con giudici magari eliminando i voti agli estremi per evitare manipolazioni. Supponiamo di applicare questo metodo al nostro esempio.

|       | $F_1$ | $F_2$ | $F_3$ | $F_4$ | $F_5$ | $F_6$ | $F_7$ | Totale |
|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|-------|--------|
| $R_1$ | 10    | 10    | 10    | 5     | 5     | 5     | 0     | 45     |
| $R_2$ | 7     | 9     | 9     | 10    | 10    | 7     | 1     | 53     |
| $R_3$ | 9     | 8     | 8     | 9     | 9     | 10    | 2     | 55     |
| $R_4$ | 8     | 7     | 7     | 8     | 8     | 9     | 10    | 57     |

Ora  $R_4$  è il vincitore!

Non sono cambiate le preferenze individuali ma usando metodi di aggregazione diversi si ottengono scelte differenti.

## Alcune proprietà dei metodi elettorali

**Compatibilità con Condorcet:** Il vincitore di Condorcet viene eletto quando esiste.

**Monotonia:** Avere più supporto non può peggiorare la situazione

**Partecipazione:** Risulta sempre conveniente partecipare al voto.

**Indipendenza:** la posizione nella classifica finale dei candidati A e B dovrebbe dipendere sola dalle scelte relative ai candidati A e B .

**Unanimità :** Se tutti i votanti pensano che A sia migliore di B tale relazione deve valere anche nell'ordinamento aggregato.

## Candidato di bandiera

Consideriamo un candidato che non ha possibilità di vittoria ma che influenza il risultato come nel caso del candidato C del seguente esempio.

|          |    |    |   |
|----------|----|----|---|
| # voters | 49 | 48 | 3 |
| <hr/>    |    |    |   |
|          | A  | B  | C |
|          | B  | A  | B |
|          | C  | C  | A |

## Candidato di bandiera

| # votanti | 35 | 33 | 32 |
|-----------|----|----|----|
|           | A  | B  | C  |
|           | C  | A  | B  |
|           | B  | C  | A  |

C è un candidato di bandiera.

Il criterio della maggioranza e quello di Borda scelgono A.

Senza C, il criterio della maggioranza e quello di Borda scelgono B.

## Maggioranza con ballottaggio

- Usa il criterio della maggioranza assoluta.
- Se non esiste un vincitore con il criterio della maggioranza assoluta al secondo turno si vota sui due (o più ) candidati che hanno ottenuto il punteggio massimo.
- Si usa il criterio della maggioranza sul sottoinsieme di candidati.

## More-is-Less Paradox: maggioranza con ballottaggio

| # votanti | 6 | 5 | 4 | 2 |
|-----------|---|---|---|---|
| A         | C | B | B |   |
| B         | A | C | A |   |
| C         | B | A | C |   |

Vincitore A

| # votanti | 6 | 5 | 4 | 2 |
|-----------|---|---|---|---|
| A         | C | B | A |   |
| B         | A | C | B |   |
| C         | B | A | C |   |

Vincitore C



## Violazione dell'indipendenza: metodo di Borda

| # votanti | 3 | 2 | 2 |
|-----------|---|---|---|
| A         | B | C |   |
| B         | C | A |   |
| C         | A | B |   |
| X         | X | X |   |

| # votanti | 3 | 2 | 2 |
|-----------|---|---|---|
| A         | B | C |   |
| B         | C | X |   |
| C         | X | A |   |
| X         | A | B |   |

Nel primo caso

$A(15) >_{BC} B(14) >_{BC} C(13) >_{BC} X(0)$

mentre nel secondo

$C(13) >_{BC} B(12) >_{BC} A(11) >_{BC} X(6)$

## Paradosso dei gemelli: maggioranza con ballottaggio

Un votante ottiene un risultato meno favorevole se i suoi “gemelli” decidono di non partecipare all' elezione.

| # votanti | 4 | 3 | 1 | 3 |
|-----------|---|---|---|---|
| A         | B | C | C |   |
| B         | C | A | B |   |
| C         | A | B | A |   |

Vincitore C

| # votanti | 2 | 3 | 1 | 3 |
|-----------|---|---|---|---|
| A         | B | C | C |   |
| B         | C | A | B |   |
| C         | A | B | A |   |

Vincitore B

## Manipolazione delle preferenze

| # votanti | 3 | 3 | 1 |
|-----------|---|---|---|
| A         | B | C |   |
| B         | A | A |   |
| C         | C | B |   |

Vincitore con Borda A

| # votanti | 3 | 3 | 1 |
|-----------|---|---|---|
| A         | B | C |   |
| B         | C | A |   |
| C         | A | B |   |

Vincitore con Borda B

## Teorema di impossibilità di Arrow

Dato un numero finito di individui e almeno tre alternative sociali, l'unica funzione di aggregazione razionale delle preferenze individuali ovvero che soddisfa gli assiomi di unanimità e indipendenza è quella dittatoriale.

Vi ringrazio per l'attenzione!