

Alcune idee matematiche per l'economia, la finanza ed il management

Marta Cardin

(mcardin@unive.it)

Marco Corazza

(corazza@unive.it)

Silvio Giove

(sgiove@unive.it)

Dipartimento di Economia – Università Ca' Foscari Venezia

Mathesis Venezia – Liceo Foscarini – Venezia, 06 Novembre 2018

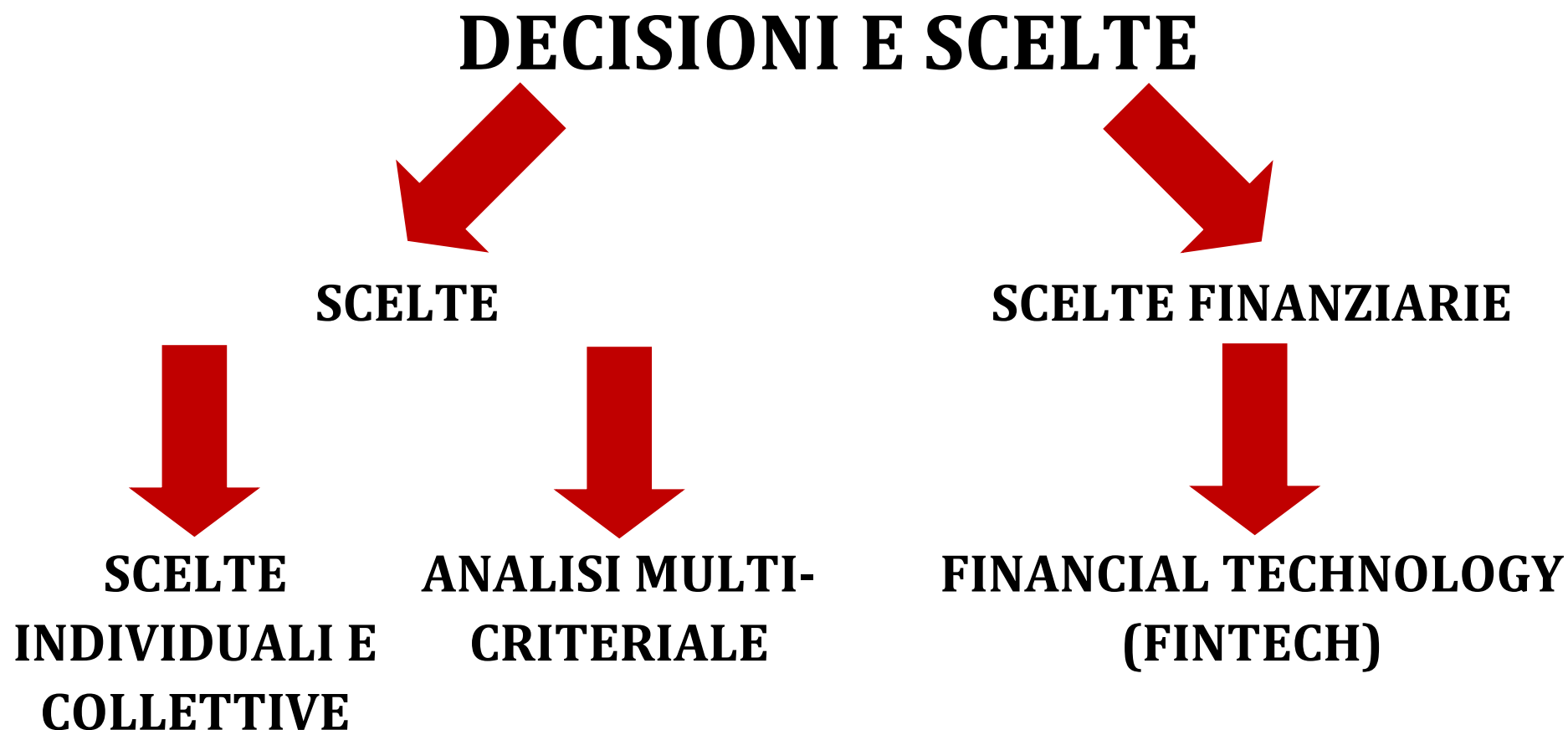
Introduzione



«Il vero economista deve possedere una rara combinazione di talenti. [...] In qualche misura deve essere un **matematico**, uno storico, un uomo di stato ed un filosofo.»

John Maynard Keynes

Introduzione



Scelte individuali e collettive

Scelte individuali

$$x = \left\{ \left(-2\text{€}, \frac{1}{2} \right), \left(1\text{€}, \frac{1}{4} \right), \left(5\text{€}, \frac{1}{4} \right) \right\} \text{ o } y = \left\{ \left(-5\text{€}, \frac{1}{4} \right), \left(0\text{€}, \frac{1}{4} \right), \left(6\text{€}, \frac{1}{2} \right) \right\}?$$

- Criterio del **valor medio**?

$$E(x) = \sum_{i=1}^3 x_i p_{x,i} = \left(-2 \frac{1}{2} + 1 \frac{1}{4} + 5 \frac{1}{4} \right) \text{€} = \frac{1}{2} \text{€} = 0.50\text{€}$$

$$E(y) = \sum_{i=1}^3 y_i p_{y,i} = \left(-5 \frac{1}{4} + 0 \frac{1}{4} + 6 \frac{1}{2} \right) \text{€} = \frac{7}{4} \text{€} = 1.75\text{€}$$

$$E(y) > E(x) \Rightarrow y \succ x$$

Scelte individuali

- Criterio del **valor medio**?

$$E(y) > E(x) \Leftrightarrow y \succ x?$$

NO!

Scelte individuali

- Limiti del criterio del **valor medio**:
 - Non è in grado di **valutare il rischio**.

$$x = \left\{ \left(-100\text{€}, \frac{1}{2} \right), \left(200\text{€}, \frac{1}{2} \right) \right\} \text{ o } y = 50\text{€}?$$

$$E(x) = 50\text{€} = E(y) = 50\text{€} \Rightarrow x \sim y$$

- Paradosso di San Pietroburgo.
- Altri limiti.

Scelte individuali

- Criterio dell'**utilità attesa**?
- L'“importanza” di un importo monetario non dipende dal suo valore nominale, ma piuttosto dall'**utilità** che tale valore nominale ha per il suo fruitore.

Scelte individuali

- Una funzione di utilità della moneta

$$u(x): M \rightarrow \mathbf{R}$$

dove x indica l'importo monetario ed M indica l'insieme degli importi monetari certi, è una funzione tale che per ogni coppia $x_1, x_2 \in M$, si ha che

$$u(x_1) > u(x_2) \Leftrightarrow x_1 \succ x_2$$

e

$$u(x_1) = u(x_2) \Leftrightarrow x_1 \sim x_2.$$

Scelte individuali

- Esiste $u(x)$?



John von Neumann

Oskar Morgenstern

- **J. von Neumann e O. Morgenstern (1947): “Theory of Games and Economic Behavior”, Princeton University Press, 1947**

Scelte individuali

- Si consideri una relazione $\succsim$, definita sull'insieme R , che goda delle seguenti proprietà:
 - **riflessività**: $\forall x \in X$ si ha $x \succsim x$;
 - **transitività**: $\forall$ ogni tripletta $x, y, z \in X$, se $x \succsim y$ e $y \succsim z$ allora $x \succsim z$;
 - **completezza**: $\forall$ ogni coppia $x, y \in X$ si ha $x \succsim y$ o $y \succsim x$;
 - **continuità**: $\forall$ ogni tripletta $x, y, z \in X$, se $x \succsim y$ e $y \succsim z$ allora esiste una probabilità $p \in [0, 1]$ tale che $z \sim px + (1 - p)y$;
 - **indipendenza**: $\forall$ ogni coppia $x, y \in X$, se $x \succsim y$ allora esistono $z \in X$ una probabilità $p \in [0, 1]$ tali che $px + (1 - p)z \succsim py + (1 - p)z$.

Scelte individuali

- Data la relazione $\succsim$, allora esiste una funzione di utilità $u(x)$ tale che

$$E(u(x_1)) = \sum_{i=1}^n u(x_{1,i})p_{1,i} > E(u(x_2)) = \sum_{i=1}^n u(x_{2,i})p_{2,i} \Leftrightarrow x_1 \succ x_2$$

e

$$E(u(x_1)) = E(u(x_2)) \Leftrightarrow x_1 \sim x_2.$$

Scelte sociali

- La teoria delle **scelte sociali** studia come si possano aggregare le scelte individuali per formare una scelta collettiva.
- Esempio classico: **sistemi di voto**.
- Sistema di voto alla **J.-C. de Borda** (1733-1799), alla **M.-J.-A.-N. de Caritat**, marchese di **Condorcet** (1743-1794), alla **K.J. Arrow** (1921-2017) ...
- **Borda**: il vincitore **c'è sempre** ma potrebbe essere **non unico**;
Condorcet: il vincitore potrebbe **non esserci**, ma quando c'è è **unico**.

Scelte sociali

- È possibile specificare un sistema di voto che trasformi l'insieme delle preferenze individuali in un ordinamento globale coerente?



Kenneth Joseph Arrow

Scelte sociali

- **Teorema dell'impossibilità di K.J. Arrow** (1951)
 - **Universalità**: tutte le preferenze dei singoli sono ammissibili;
 - **Paretianità (debole)**: se tutti i singoli preferiscono un'alternativa ad un'altra, anche la collettività deve seguire lo stesso ordine di preferenze;
 - **Non-dittatorialità**: nessun singolo può imporre le proprie preferenze agli altri;
 - **Indipendenza della scelta**.
- Assunte queste ipotesi, se i **votanti** sono almeno **2** e le **opzioni** almeno **3**, allora **non esiste** un sistema di voto che soddisfi tutte le ipotesi.

Scelte

Teoria delle decisioni

Scelte – Analisi Multi-Criteriale

- Strumenti per il **supporto alle decisioni**:

In condizioni di certezza	Numero finito di alternative: Analisi Multi-Criteriale
	Numero infinito di alternative: Programmazione Matematica
In condizioni di incertezza	
In condizioni di rischio	

Scelte – Analisi Multi-Criteriale

- L'**analisi Multi-Criteriale** effettua la **valutazione comparata** di alternative utilizzando simultaneamente **più criteri di scelta**.
- Possibili criteri per la scelta di un'automobile:
 - consumo ↓
 - velocità massima ↑
 - costo ↓
 - comodità ↑
 - ...

Scelte – Analisi Multi-Criteriale

- **Vantaggi** dell'analisi multicriteriale:
 - Capacità di considerare tutte le “**variabili**” del problema;
 - Utilizzabilità di criteri sia **quantitativi** sia **qualitativi**;
 - **Trasparenza** del processo di valutazione;
 - Partecipazione del **DM** al processo di valutazione;
 - **Adattabilità** a problemi di scelta molto diversi fra di loro.

Scelte – Analisi Multi-Criteriale

- **Output** dell'**analisi Multi-Criteriale**:
 - **Ranking**;
 - **Rating**;
 - Valutazione dei **punti di forza** e **di debolezza** di una alternativa.
- **Metodi** per l'**analisi Multi-Criteriale**:
 - Metodi di **Aggregazione**;
 - Metodi di **OutRanking**.

Scelte – Analisi Multi-Criteriale

- **Elementi** dell'analisi multicriteriale:
 - $a_1, \dots, a_i, \dots, a_m$: m **azioni/alternative**;
 - $c_1, \dots, c_j, \dots, c_n$: n **criteri**;
 - $g_j(a_i)$: **valutazione** dell'azione/alternativa **i -esima** rispetto al criterio **j -esimo** (esistono $m \times n$ valutazioni).
- Valutare la “**forza**” della proposizione
“ a_i è **almeno tanto buona quanto** a_k ”.

Scelte – Analisi Multi-Criteriale

- Risposta **classica**:
 - $a_i \mathbf{P} a_k$ (a_i è **preferita** ad a_k) $\leftrightarrow a_i \succ a_k$;
 - $a_k \mathbf{P} a_i$ (a_k è **preferita** ad a_i) $\leftrightarrow a_k \succ a_i$;
 - $a_i \mathbf{I} a_k$ (a_i è **indifferente** ad a_k) $\leftrightarrow a_i \sim a_k$;
 - $a_i \mathbf{J} a_k$ (a_i è **incomparabile** con a_k) $\leftrightarrow a_i \not\sim a_k$.

Scelte – Analisi Multi-Criteriale

- Risposta alla **MULTicriteria RAnking MEthod (MURAME)**:
 - $a_i \mathbf{P}_j a_k$ (a_i è **fortemente preferita** ad a_k rispetto al criterio j-esimo) sse
$$g_j(a_i) > g_j(a_k) + p_j,$$
con p_j soglia di preferenza;
 - $a_i \mathbf{Q}_j a_k$ (a_i è **debolmente preferita** ad a_k rispetto al criterio j-esimo) sse
$$g_j(a_k) + q_j < g_j(a_i) \leq g_j(a_k) + p_j,$$
con q_j soglia di indifferenza;
 - $a_i \mathbf{I}_j a_k$ (a_i è **indifferente** ad a_k rispetto al criterio j-esimo) sse
$$|g_j(a_i) - g_j(a_k)| \leq q_j.$$

Scelte – Analisi Multi-Criteriale

- Osservazione sull'introduzione della **preferenza debole**:

Caffè A  1 cucchiaino di zucchero	Caffè B  1 cucchiaino di zucchero + 1 granello di zucchero
--	---

Quale caffè scelgo? A o B?

Scelte – Analisi Multi-Criteriale

- Calcolo delle **discordanza** tra due **azioni/alternative**, A e B, per il generico **criterio** j-esimo con soglia di **veto**.
 - Devo essere operato.
 - Posso scegliere tra due chirurghi (**azioni/alternative**): C1, C2.
 - Baso la scelta sul **criterio**: voto medio degli esami di profitto.
 - $VMEP(C1) = 29.59$, $VMEP(C2) = 29.00 \rightarrow$ **Scelgo C1!**
- MA...**
- C1: **30** in tutti gli esami di profitto tranne uno, **18** in “Anatomia umana”.
C2: **29** in tutti gli esami di profitto.
- Scelgo ancora C1?**

Scelte – Analisi Multi-Criteriale

Applicazione al mercato immobiliare veneziano

- Verifica della **conformità** tra il **prezzo di appartamenti** (azioni/alternative) siti in Venezia e la **qualità** di questi ultimi espressa in funzione di opportune caratteristiche (criteri).

Scelte – Analisi Multi-Criteriale

Applicazione al mercato immobiliare veneziano (continua)

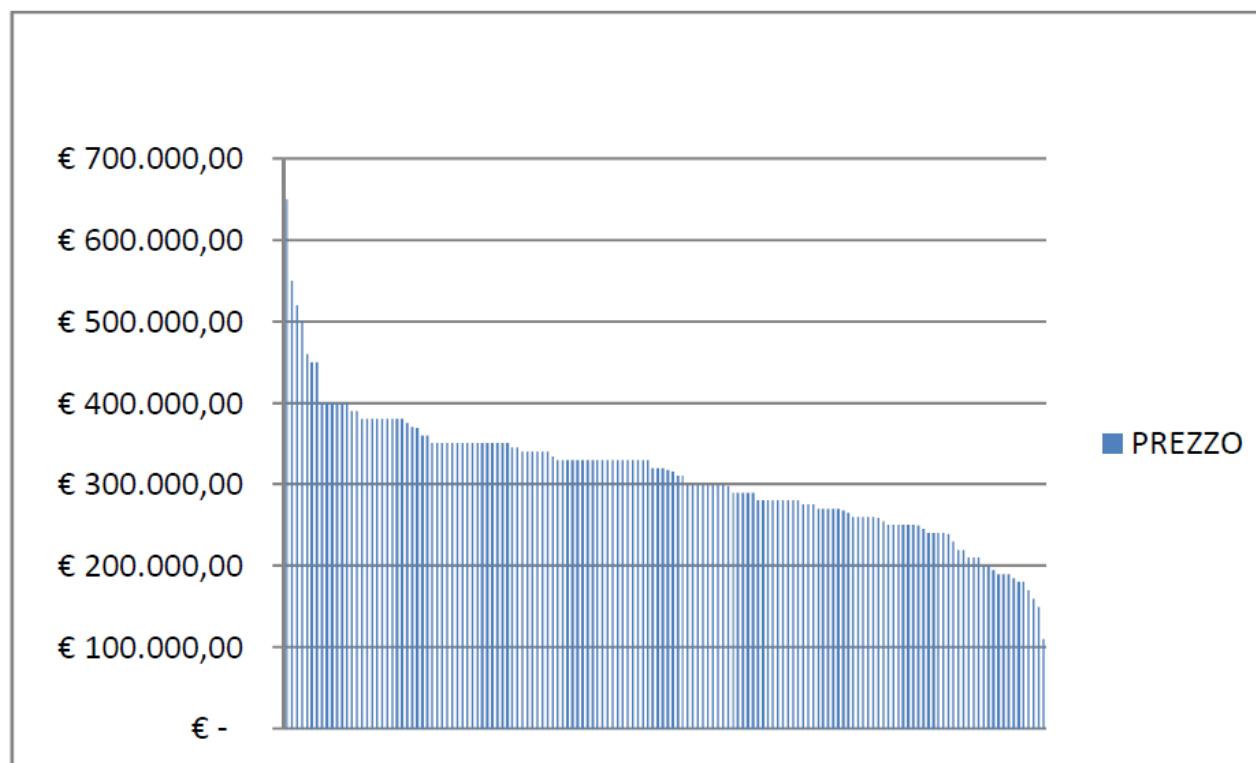
- **Azioni/Alternative:** 152 appartamenti siti in Venezia.
- **Criteri:**

Metri quadrati	Luminosità [Bassa; Media; ...]
Piano [Terra; Primo; Secondo ...]	Presenza del poggiolo
Zona [San Marco; San Polo; ...; Castello]	Presenza del terrazzo
Numero di vani	Presenza dell'ascensore
Numero di bagni	Presenza del giardino
Riscaldamento [Sì; No]	Stato [Da ristrutturare; Abitabile; ...]

Scelte – Analisi Multi-Criteriale

Applicazione al mercato immobiliare veneziano (continua)

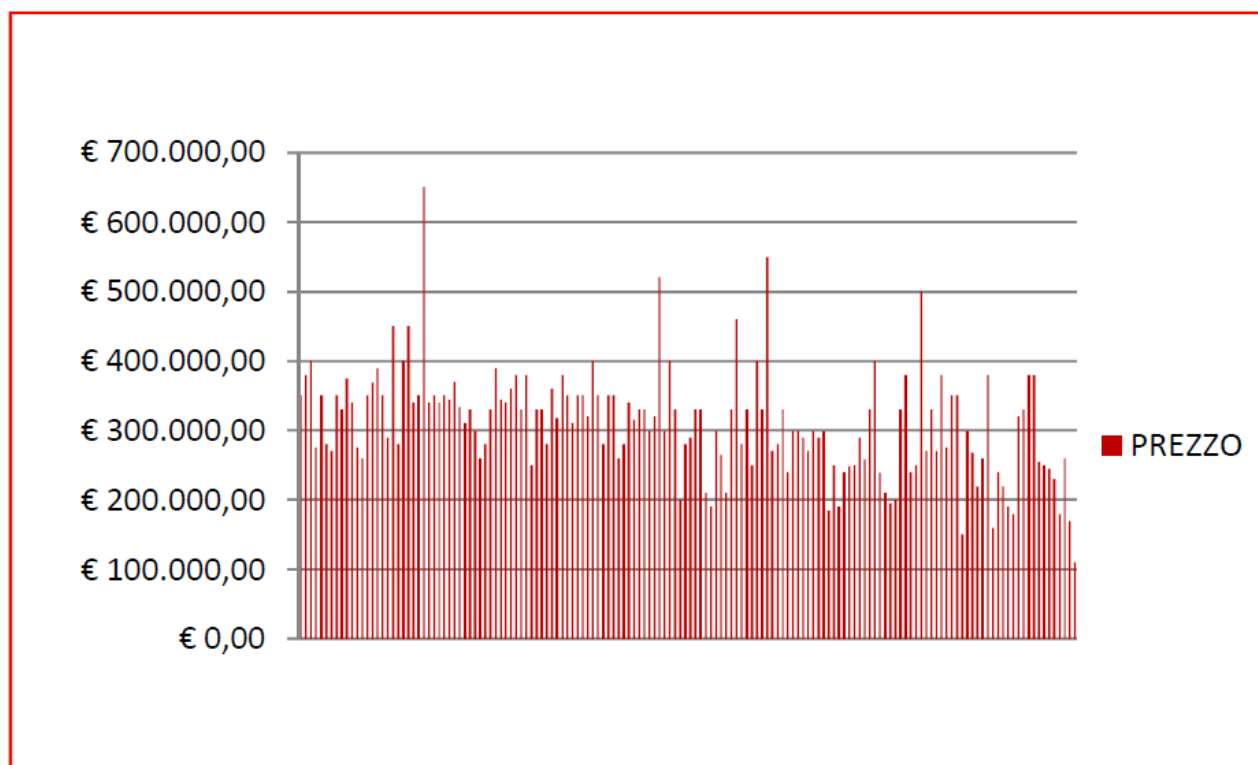
- **Ordinamento** dei 152 appartamenti secondo il **prezzo**:



Scelte – Analisi Multi-Criteriale

Applicazione al mercato immobiliare veneziano (continua)

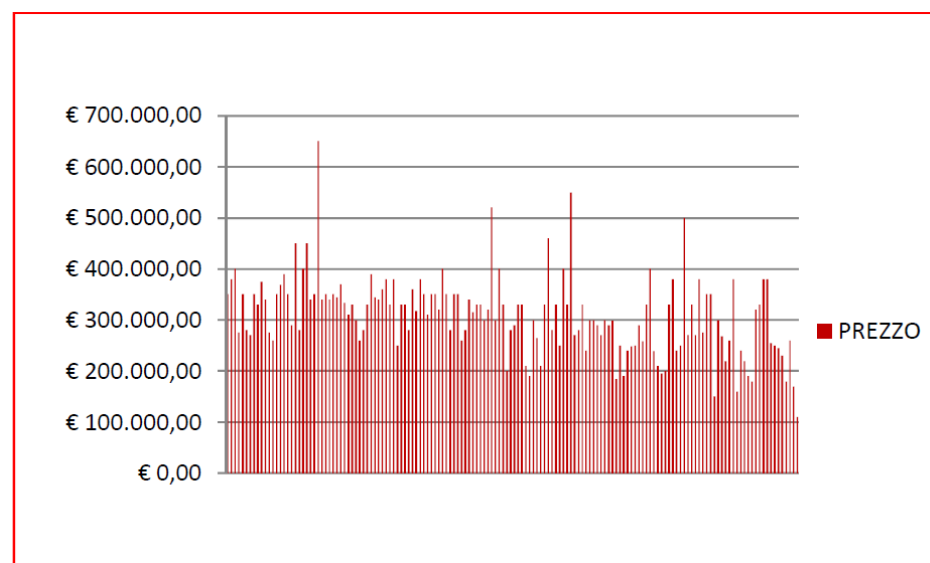
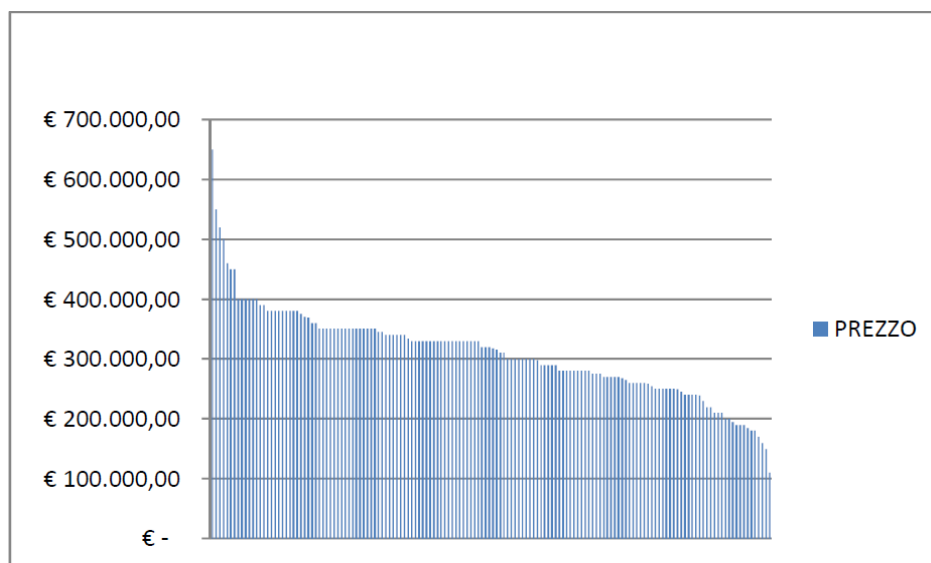
- **Ordinamento** dei 152 appartamenti secondo il **MURAME**:



Scelte – Analisi Multi-Criteriale

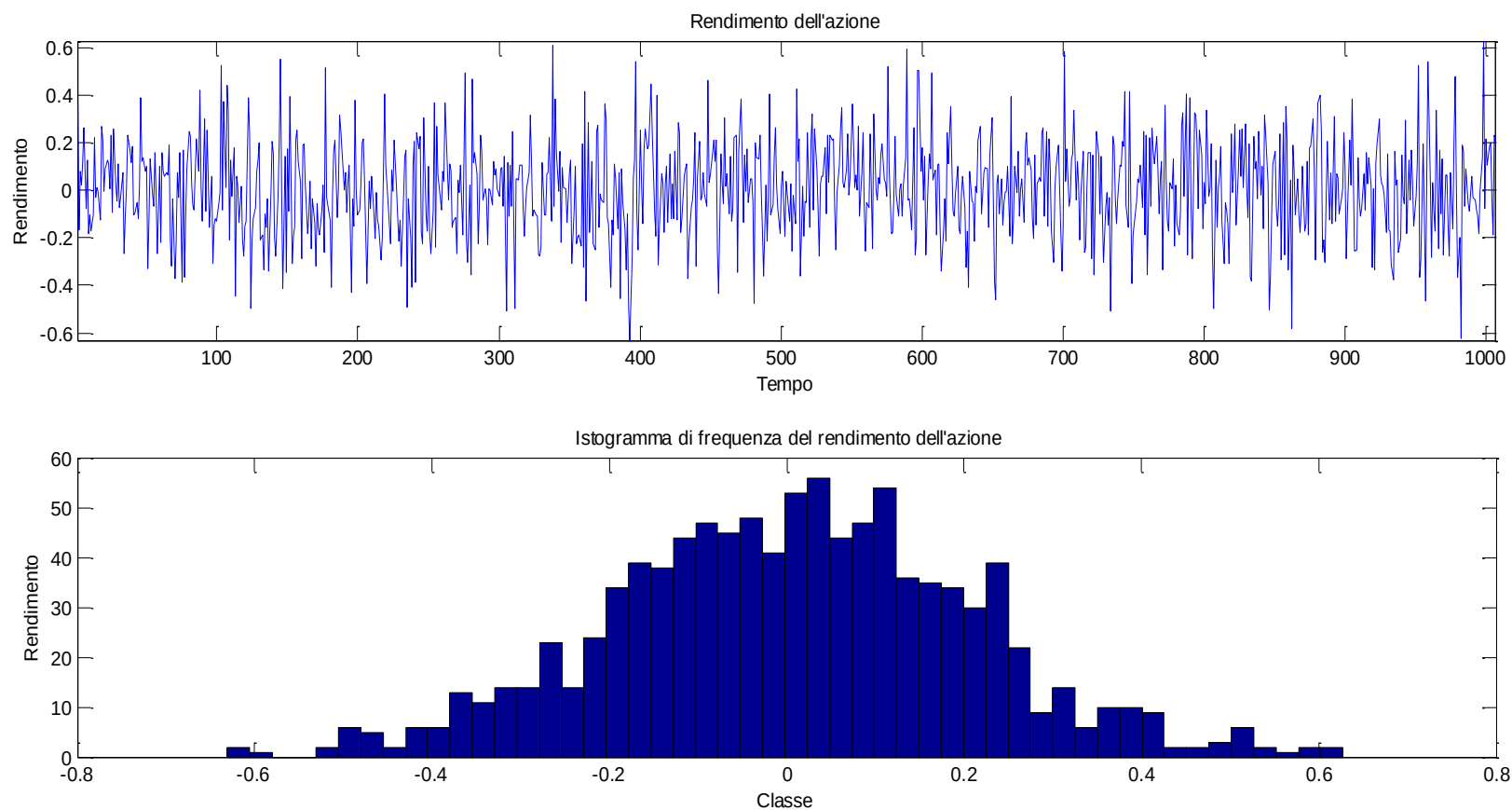
Applicazione al mercato immobiliare veneziano (continua)

- I **prezzi** degli appartamenti **non** risultano particolarmente **coerenti** con la **qualità** di questi ultimi così come dai criteri indicati.



Scelte finanziarie

Scelte finanziarie



29 Marzo 1900



Louis Jean Baptist Bachelier.

29 anni.

Tesi di dottorato alla Sorbonne:
"Théorie de la Spéculation".

29 Marzo 1900

- Louis Jean Baptist Bachelier applicò per primo la **teoria della probabilità** ai **mercati finanziari**.
- La commissione valutò la sua tesi di dottorato come **mediocre** (!).

29 Marzo 1900

- In ogni istante, le **informazioni** (pallini rossi) influenzano il **prezzo dell'azione** (pallino grigio) facendolo variare. Le informazioni **non sono prevedibili**.



29 Marzo 1900

- Rappresentazione delle **variazioni** dei **prezzi azionari** in termini di **equazione differenziale stocastica**:

$$dP(t) = \mu \cdot P(t) \cdot dt + \sigma \cdot P(t) \cdot dB(t)$$

dove $P(t)$ indica il **prezzo dell'azione**, μ indica il **drift percentuale istantaneo**, σ indica la **volatilità percentuale istantanea** e

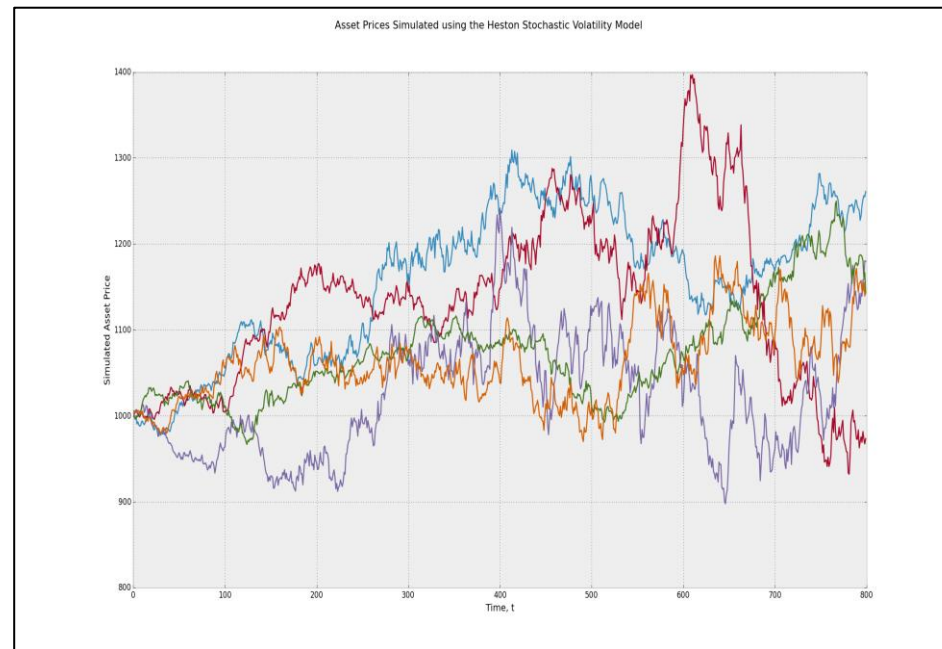
$$B(t) \sim N(0, 1)$$

indica un **moto browniano standard**.

29 Marzo 1900

- La soluzione di tale equazione differenziale stocastica è:

$$P(t) = P(0) \exp \left\{ \left[\mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right] t + \sigma [B(t) - B(0)] \right\}.$$



Financial Technology (FinTec)

Introduzione

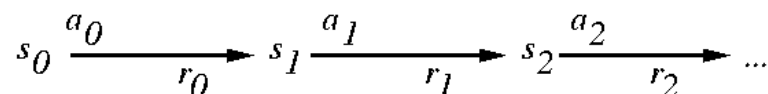
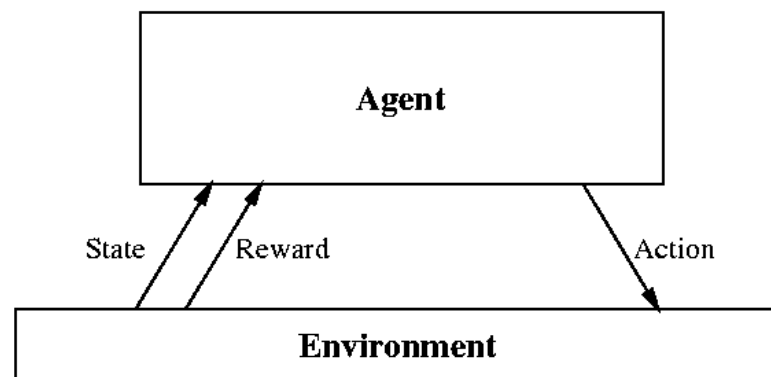
- Domanda

I metodi dell'**intelligenza artificiale** possono essere utilizzati per sviluppare sistemi di **trading finanziario** profittevoli?

- Risposta

- Nei mercati finanziari, gli agenti **interagiscono** l'un l'altro in **modi complessi co-evolvendo**.
- Durante ciò, spesso gli agenti reagiscono agli impulsi che ricevono in maniere **non** del tutto **razionali**.
- I traders possono riuscire a sfruttare questa irrazionalità per implementare **strategie profittevoli**.

Apprendimento per rinforzo



- Obiettivo:

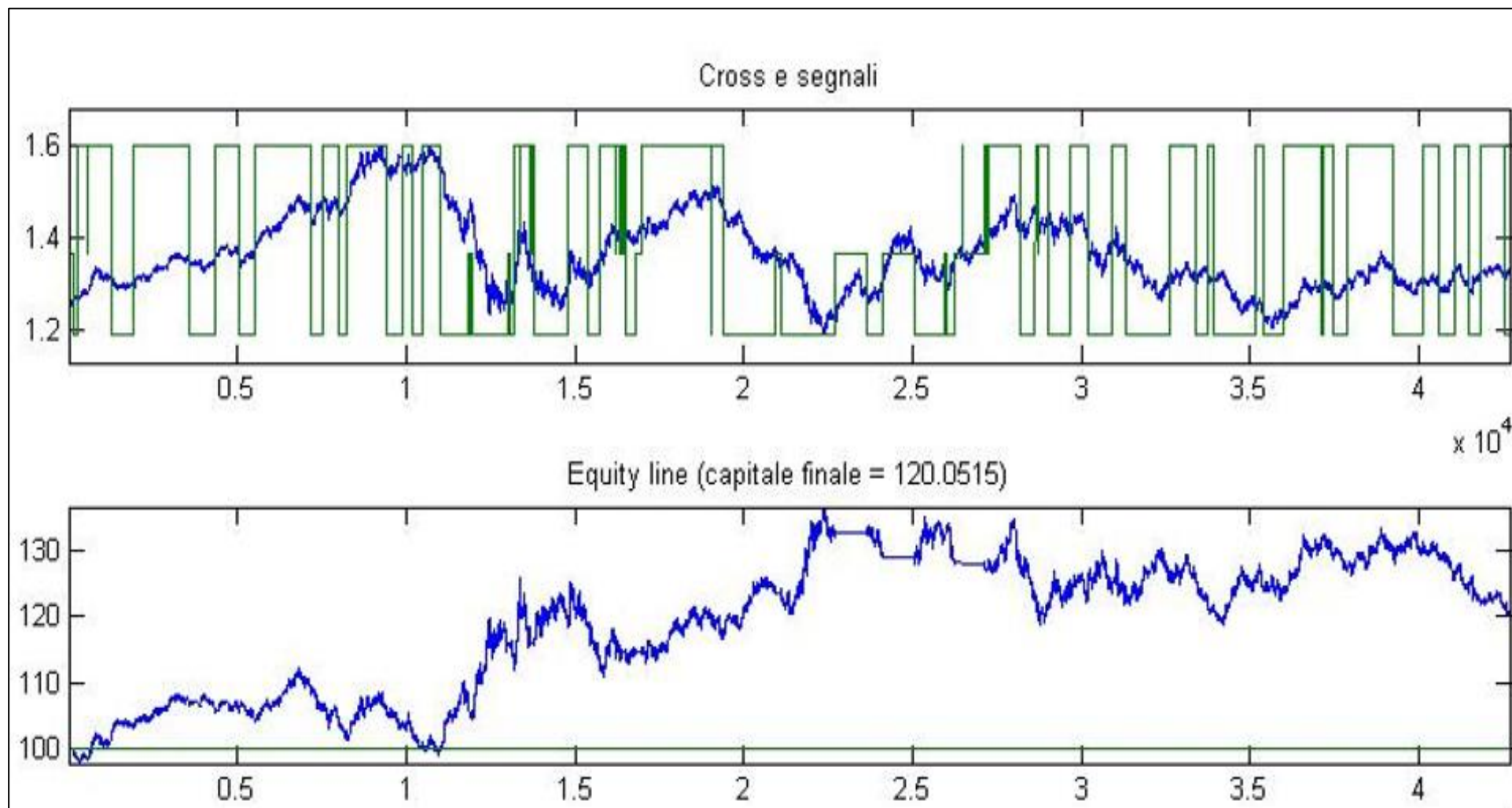
$$\max(r_0 + \gamma r_1 + \gamma^2 r_2 + \dots \gamma^i r_i + \dots)$$

in cui $\gamma \in (0, 1)$ è un **fattore di sconto**.

Applicazione

- Dati:
 - Serie temporale: **cross Euro/Dollaro statunitense**;
 - intervallo temporale: dal **15.09.2006** al **16.09.2013**;
 - frame temporale: **orario**, per un totale di **43258** rilevazioni;
 - capitale iniziale: **100**;
 - azioni possibili: **short**,
stay-out,
long.

Applicazione





Grazie
per la vostra attenzione.