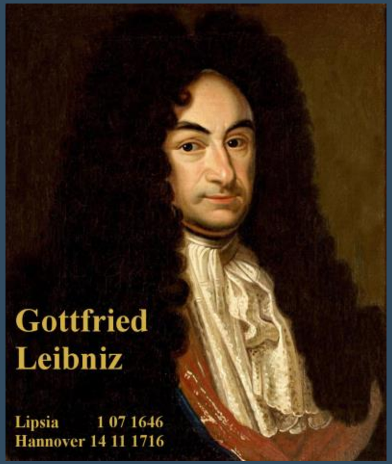
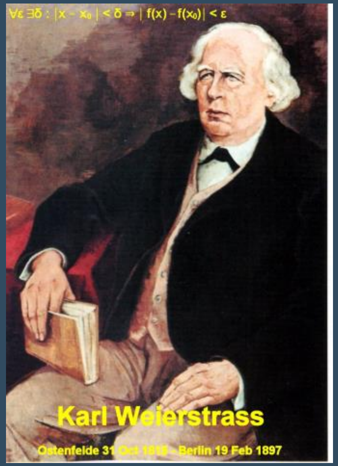
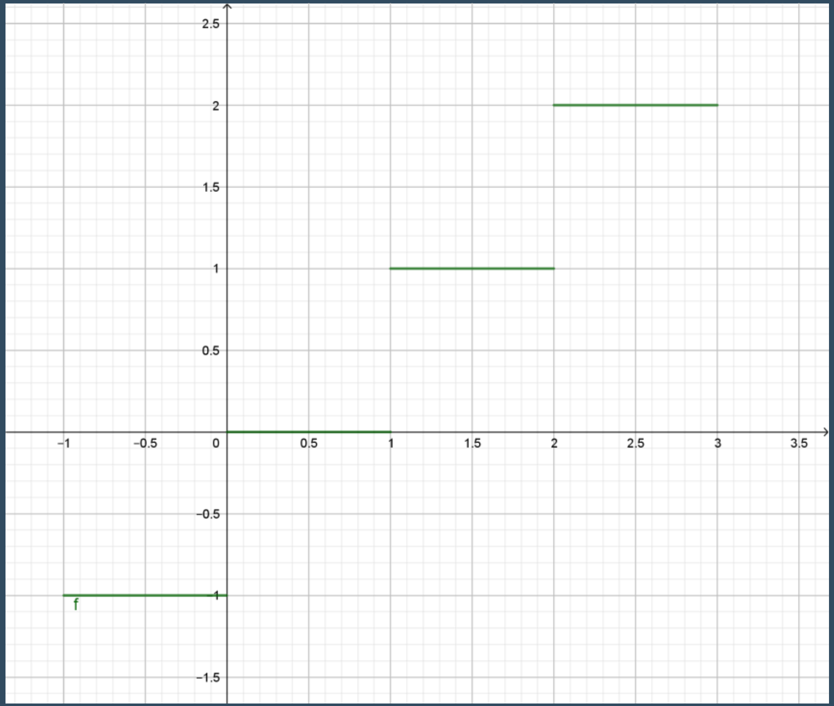
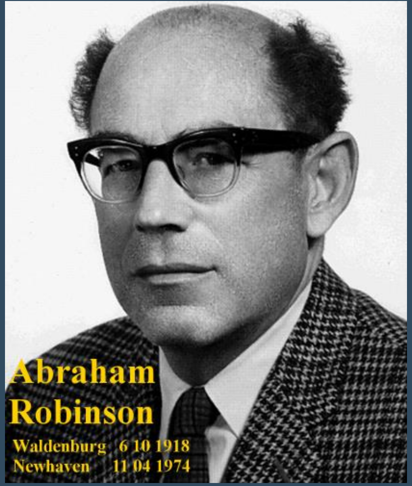
CONTINUITÀ E INTEGRALI ALLA MANIERA NSA O ALLA MANIERA DI CAUCHY-WEIERSTRASS? UN CONFRONTO

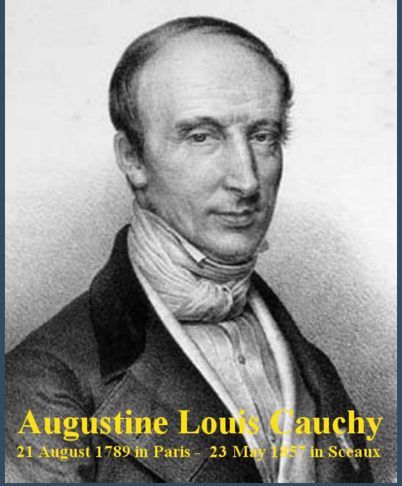
2019 Paolo Bonavoglia











10 aprile 2019 – IIS Algarotti, Venezia

INFINITESIMI O LIMITI?

È opinione diffusa che l'analisi si fondi in modo necessario sul concetto di limite, che non sia possibile fare analisi senza i limiti.

Ma Leibniz, Bernoulli, Eulero … i padri dell'analisi non usavano affatto i limiti come fondamento, bensì i numeri infinitamente piccoli (o infinitesimi) e quelli infinitamente grandi.

Limite: infinito potenziale

Infinitesimi e infiniti: infinito attuale

NUMERI INFINITAMENTE PICCOLI
INFINITE PARVUS - ULTRASMALL

Definizione

Si dice numero infinitesimo positivo un dx (o δ ε)maggiore di zero e al tempo stesso minore di ogni reale positivo.

$$0 < dx < \frac{1}{N}$$ *per qualsiasi N*

Leibniz ammette senza dimostrarlo,

il principio di estensione:

per questi nuovi numeri continuano a valere le regole ordinarie dell'algebra.

NUMERI INFINITAMENTE PICCOLI UNA STORIA TORMENTATA

Quella dei numeri infinitamente grandi o piccoli è una storia tormentata.

Usati senza troppi problemi da Leibniz, Bernoulli, Eulero, Lagrange furono i mattoni con i quali fu costruita l'analisi o calcolo ***infinitesimale***.

Pesantemente criticati da Berkeley che li definì ***spettri di quantità defunte***.

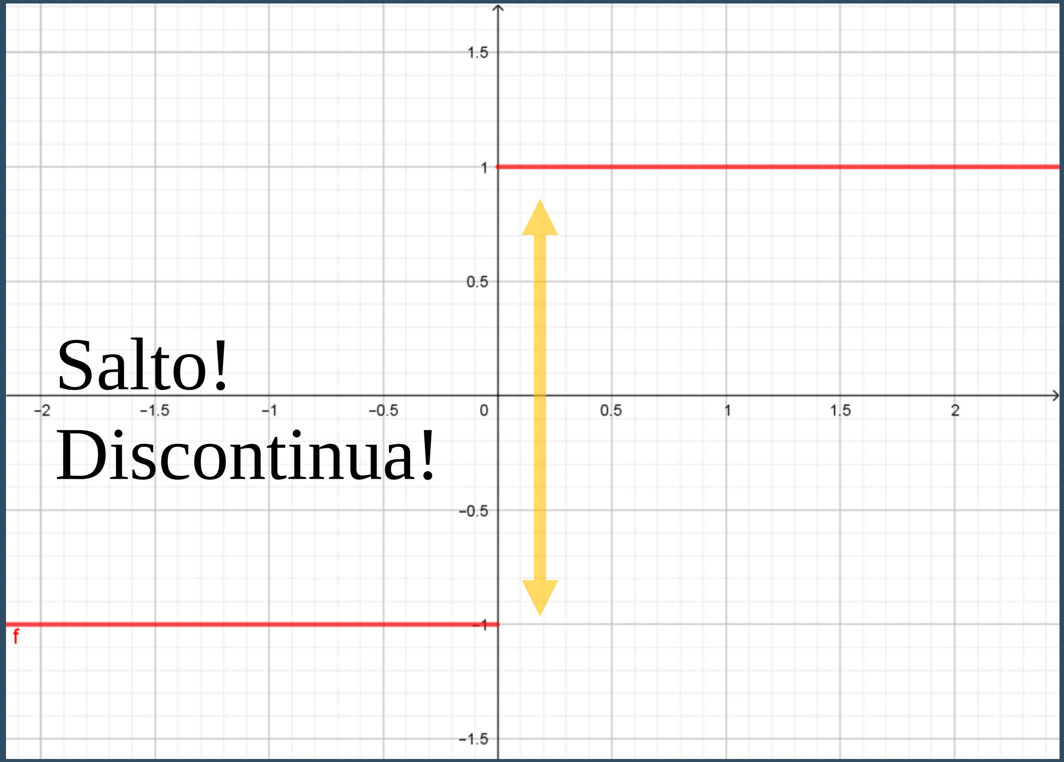
Aboliti nell'Ottocento da Cauchy e Weierstrass che rifondano l'analisi usando i limiti ed evitando così gli imbarazzanti infinitesimi.

Resuscitati e riabilitati da Abraham Robinson nel 1960 che li definisce in modo più rigoroso e crea la **Non Standard Analysis.**

La storia continua; l'approccio NSA fatica a imporsi ma ora forse 100 anni dopo la nascita di Robinson, mezzo secolo dopo la nascita della NSA …

LA CONTINUITÀ, INTUITIVAMENTE

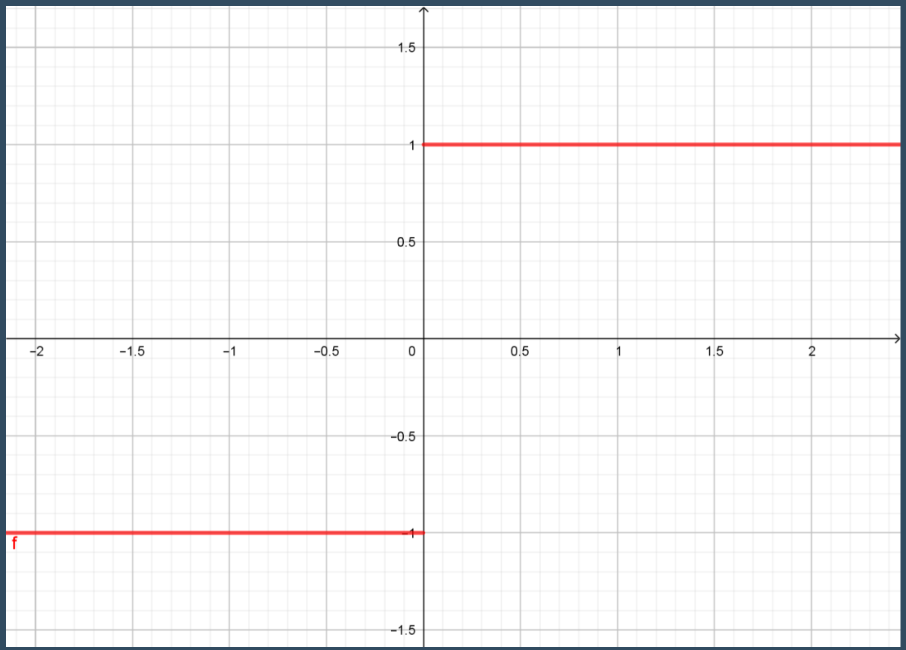
Il concetto di continuità nasce intuitivamente da quello di linea *continua* senza *salti*.



LA CONTINUITÀ FISICA

Nella fisica classica si presume che la traiettoria di un corpo sia continua, ovverosia:

- Un corpo non può scomparire da un posto e riapparire in un altro più o meno lontano (continuità spaziale, impossibilità della propagazione istantanea),
- Un corpo non può scomparire per riapparire dopo qualche tempo (continuità nel tempo, conservazione della massa).



LA CONTINUITÀ SECONDO CAUCHY-WEIERSTRASS

Data $f\ (x)$ di E in F, fè continua in x_0 quando

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : x \in E\ \wedge\ |x - x_0| < \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$$

oppure usando gli intorni:

$$\forall\varepsilon > 0\ \exists\delta > 0 : f\big(E \cup I(x_0;\delta)\big)\ \subset\ I(f(x_0);\varepsilon)$$

Che si usino gli intervalli o gli intorni non si tratta certo di formule facilmente decifrabili.

Alcuni testi introducono la continuità prima dei limiti, altri al contrario iniziano dai limiti.

LA CONTINUITÀ NSA

Nell'analisi NSA una funzione $f\ (x)$ si dice continua in x0 se ad un incremento ***infinitamente piccolo*** della x corrisponde un incremento ***infinitamente piccolo*** della f (x). (*Traduce bene il concetto intuitivo.)*

Continuità a destra

Tradotto in formula, essendo x_0 reale ed e infinitesimo,

se è $$st(\ f\ (x_0 + \varepsilon) - \ f\ (x_0))\ =\ 0$$

allora ***f (x)*** è continua a destra di x_0 ; altrimenti è discontinua a destra;

Continuità a sinistra

se è $$st(\ f\ (x_0) - f\ (x_0 - \varepsilon))\ =\ 0$$

allora ***f (x)*** è continua a sinistra di x0, altrimenti è discontinua a sinistra.

CONTROESEMPI, PAVIMENTO E SOFFITTO

Le funzioni *floor(x)* e *ceil(x)* sono ottime per esempi, controesempi, esercizi.

Per esempio: studiare la continuità nel punto A(1;1) della *floor(x)*=$\lfloor x \rfloor$

A destra: $st(\lfloor 1+\varepsilon \rfloor - \lfloor 1 \rfloor) = 1 - 1 = 0$

Continua!

A sinistra: $st(\lfloor 1 \rfloor - \lfloor 1-\varepsilon \rfloor) = 1 - 0 = 1$

Discontinua!

C'è un salto di +1

$$1 - \varepsilon \implies 1^-$$
$$1 + \varepsilon \implies 1^+$$

Abolendo gli infinitesimi nascono notazioni strane …

$$\lim_{x\to 1^+} \lfloor x \rfloor = 1 = \lfloor 1 \rfloor$$ ***continua***

$$\lim_{x\to 1^-} \lfloor x \rfloor = 0 \neq \lfloor 1 \rfloor$$ ***discontinua***

IPERBOLE EQUILATERA

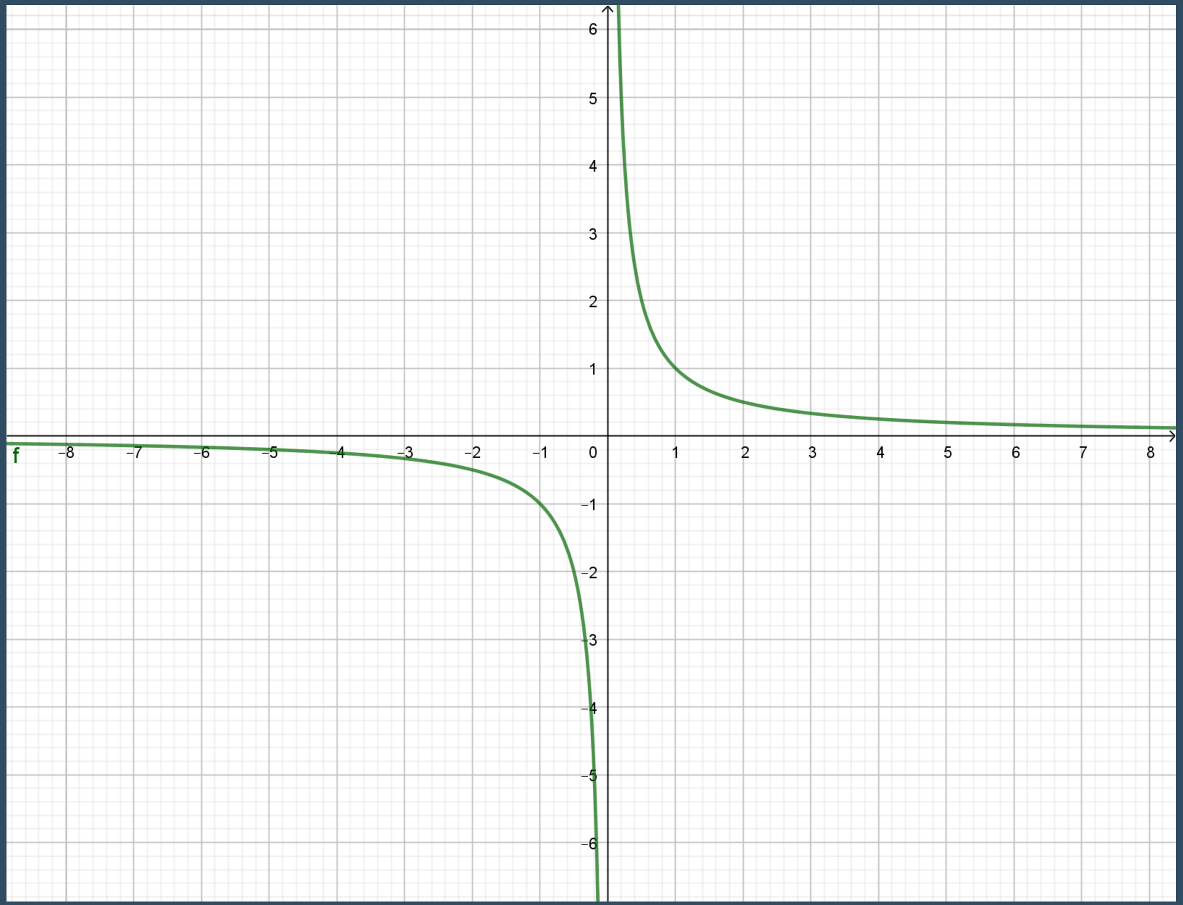
La funzione $y = \frac{1}{x}$ iperbole equilatera ha quella che veniva definita una discontinuità infinita.

Ma per $x = 0$ la funzione non è definita, quindi non è possibile neanche controllare.

Il dominio della funzione è $\mathbb{R} - \{0\}$ e quindi la funzione è continua in tutto il dominio!

Questo esempio viene a volte citato per affermare che è pericoloso e fonte di terribili fraintendimenti (misconceptions) partire dalla definizione intuitiva.

In effetti è semmai un esempio di come in matematica tutto dipende da come si definiscono le parole …



$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \qquad \frac{1}{\varepsilon} = +\omega$$

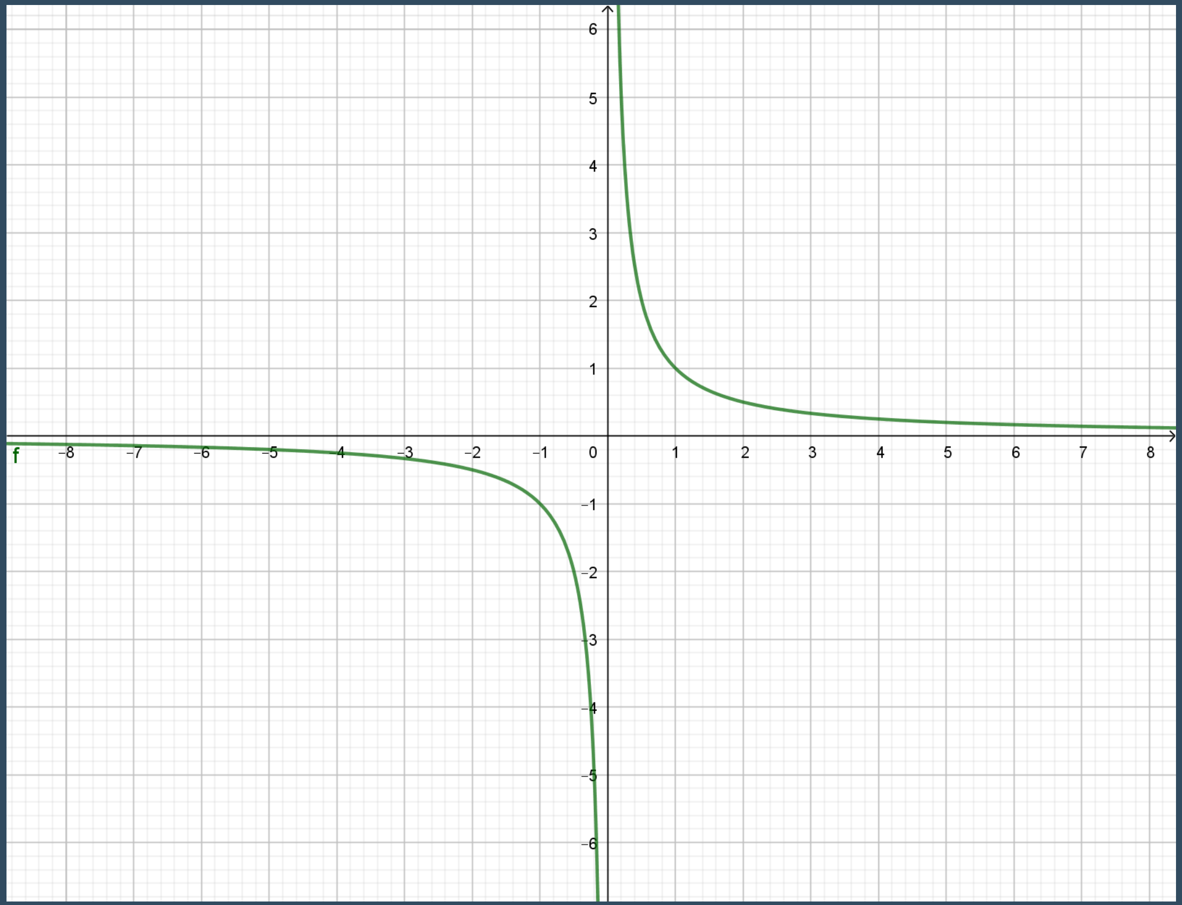
IPERBOLE EQUILATERA

Piuttosto nei dintorni dell'origine si verifica un fatto sorprendente: tra due punti infinitamente vicini ci può essere un salto infinito, se si applica la definizione di sopra anche a numeri iperreali qualsiasi, in questo caso a due infinitesimi:

Dati due punti con ascissa $x = \varepsilon$ e $x = 2\varepsilon$

$$\frac{1}{\varepsilon} - \frac{1}{2\varepsilon} = \omega - \frac{1}{2}\omega = \frac{1}{2}\omega$$

C'è appunto un salto infinito, e quindi la funzione non è continua, o meglio non è *uniformemente continua*.



LA DERIVATA NELLA NSA

Nell'analisi NSA la definizione di derivata destra è:

$$f'(x) = st\left(\frac{f(x+\varepsilon) - f(x)}{\varepsilon}\right)$$

e quella di derivata sinistra è:

$$f'(x) = st\left(\frac{f(x) - f(x-\varepsilon)}{\varepsilon}\right)$$

In alternativa si può definire la derivata media:

$$f'(x) = st\left(\frac{f\left(x+\frac{\varepsilon}{2}\right) - f\left(x-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon}\right)$$

LA FUNZIONE VALORE ASSOLUTO

La funzione valore assoluto è:

$$f(x) = |x| \begin{cases} x > 0 \ \ y = x \\ x = 0 \ \ y = 0 \\ x < 0 \ \ y = -x \end{cases}$$

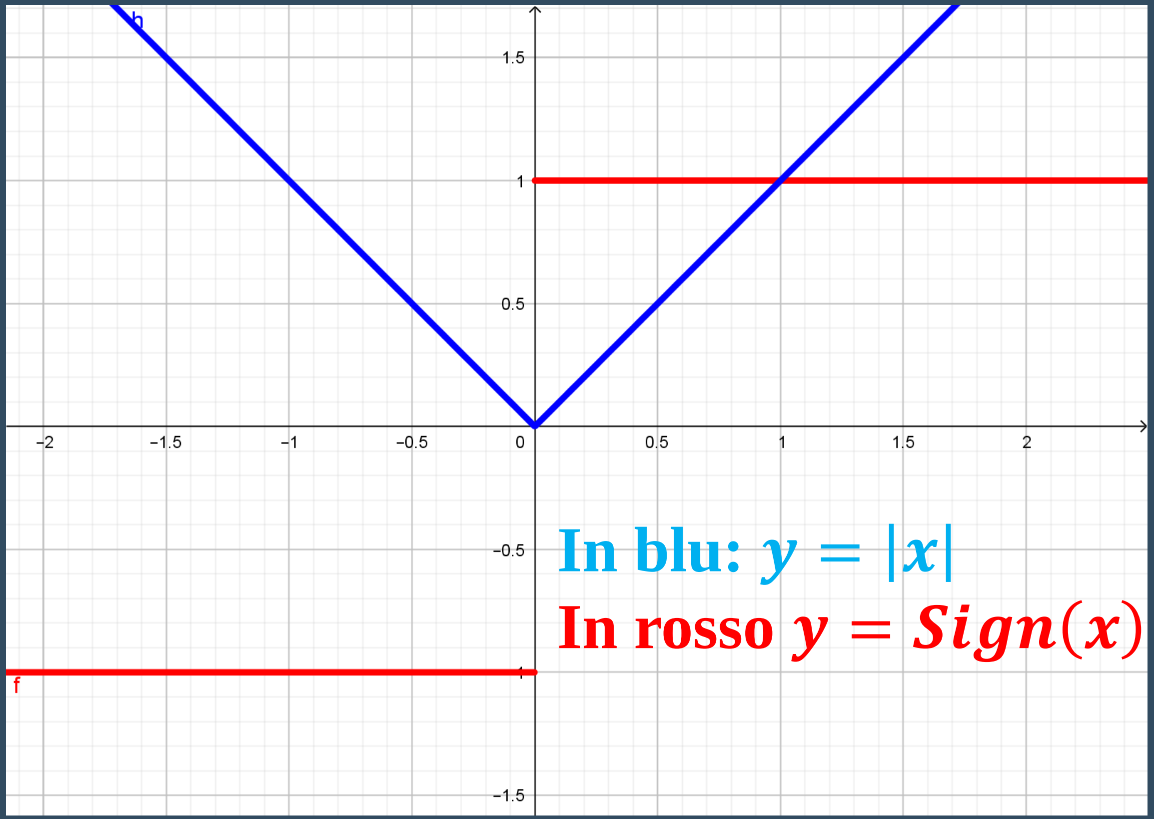
La derivata destra è $y' = 1$

La derivata sinistra è $y' = -1$

Funzione segno, per x=0?

La funzione valore assoluto non è differenziabile nell'origine.

La funzione segno ha una discontinuità non eliminabile nell'origine



LA FUNZIONE VALORE ASSOLUTO

Calcolo della derivata per x = 0, da destra e da sinistra:

$$f'(x) = st\left(\frac{f(0+\varepsilon)-f(0)}{\varepsilon}\right) = st\left(\frac{\varepsilon-0}{\varepsilon}\right) = 1$$

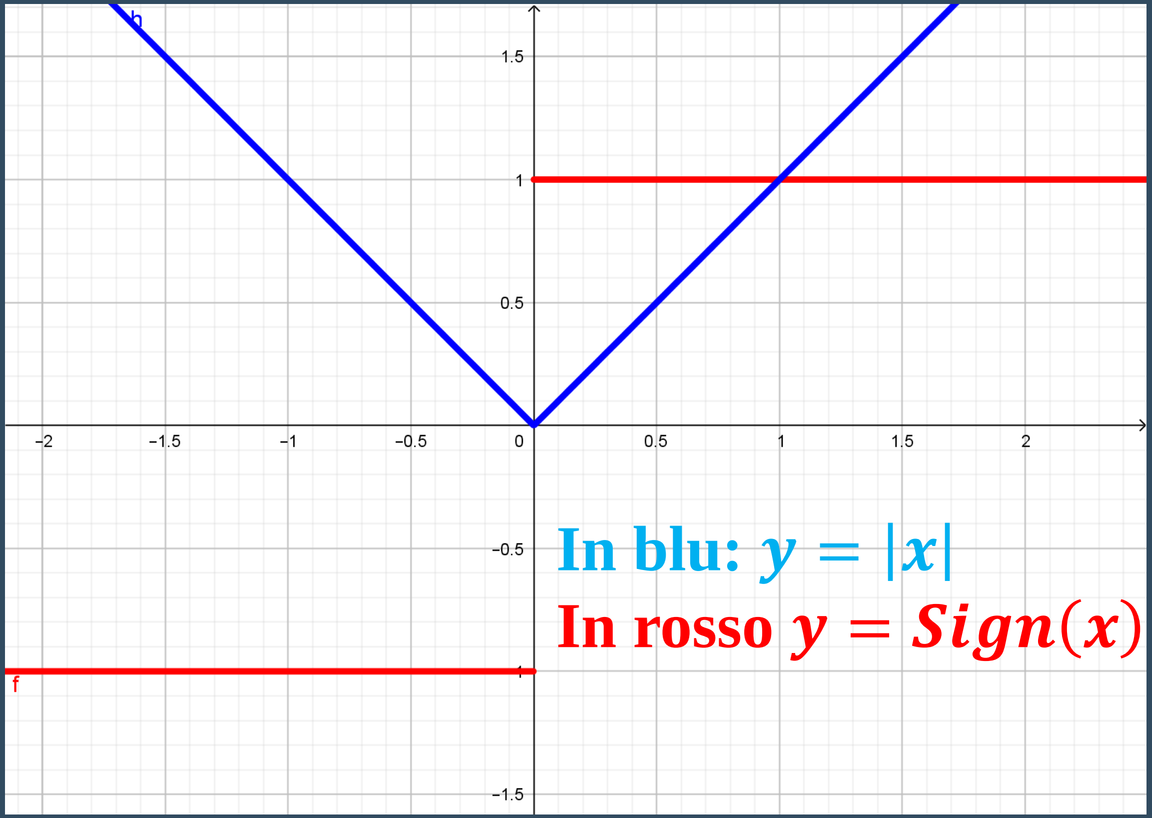
$$f'(x) = st\left(\frac{f(0)-f(0-\varepsilon)}{\varepsilon}\right) = st\left(\frac{0-\varepsilon}{\varepsilon}\right) = -1$$

La derivata è discontinua per x=0 e quindi la funzione non è differenziabile nell'origine.

Ma la derivata media é:

$$f'(x) = st\left(\frac{f\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)-f\left(-\frac{\varepsilon}{2}\right)}{\varepsilon}\right) = st\left(\frac{0}{\varepsilon}\right) = 0$$

In questo senso sarebbe derivabile ma non differenziabile.



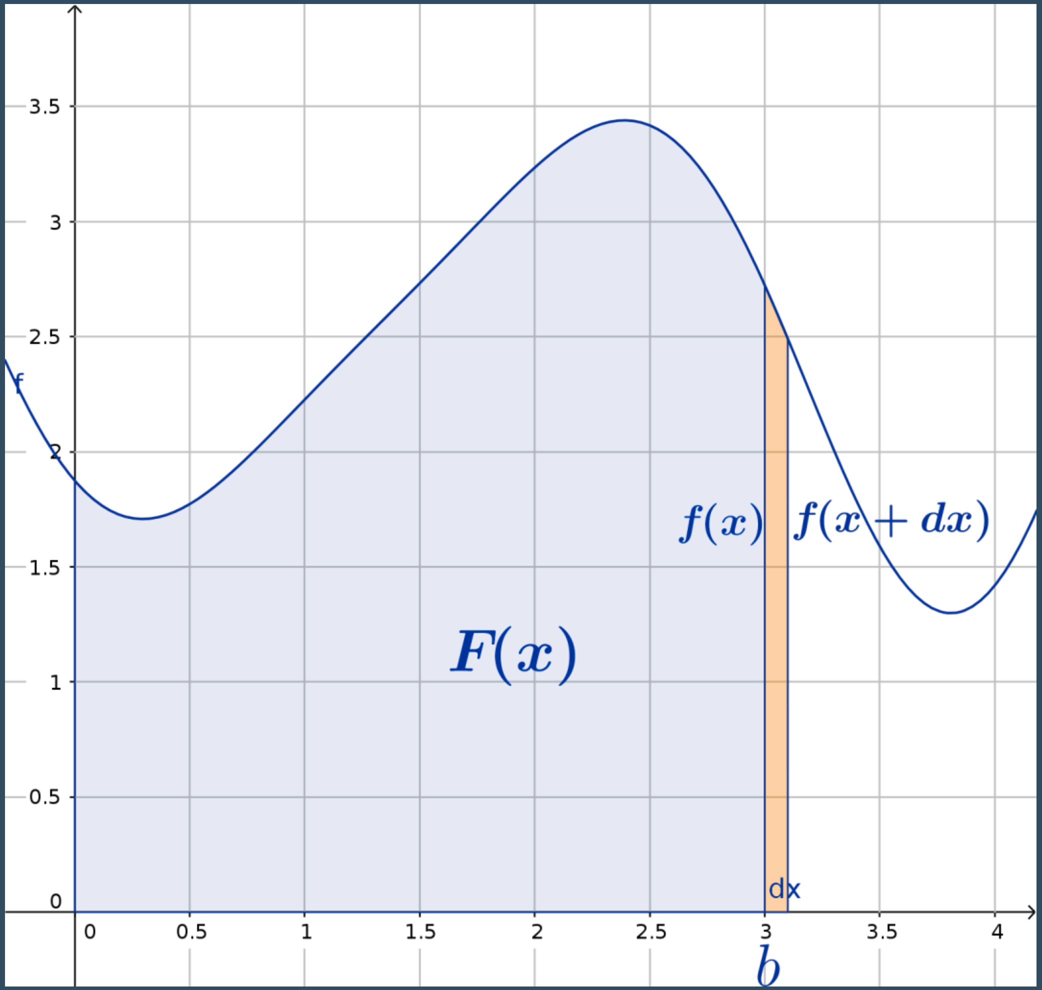
L'INTEGRALE DEFINITO

Nei manuali di analisi classica, nasce questa domanda:

$\int_a^b f(x)dx = \ \ldots$ che significato ha dx ??

Risposta: nessuno, il simbolo va preso tutto insieme, dx da solo non ha significato alcuno, come la A di CASA non ne ha.

Nella NSA viceversa $f(x)dx$ è un prodotto vero, tra il reale $f(x)$ e l'infinitesimo dx, geometricamente l'area di un rettangolo infinitesimo.

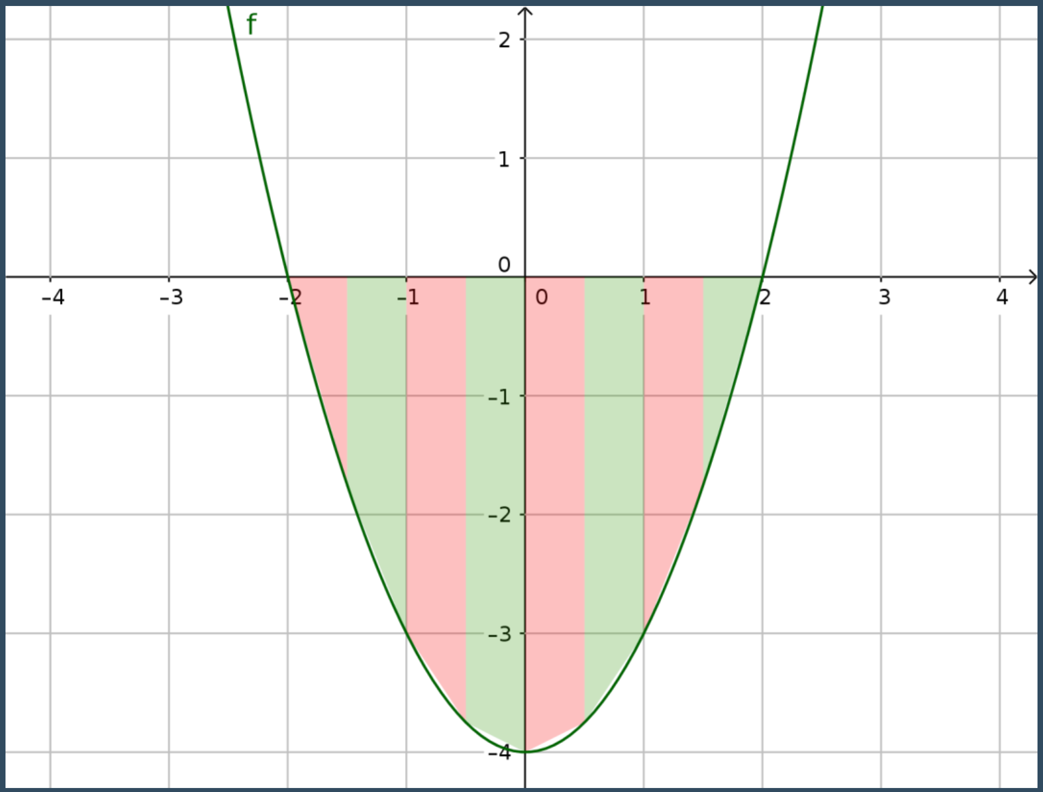


LA FORMULA DEI TRAPEZI

Uno dei metodi più semplici per approssimare un'area è la formula dei trapezi; la figura viene *tagliata a* fette di uguale spessore Δx; nel caso della figura sottesa a una funzione, si ottengono trapezoidi, con basi $f(x)$ ed $f(x+dx)$ ed altezza Δx. Dividendo l'area in n trapezoidi:

$$A \ \approx \Delta x \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) \ldots + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$

Che è appunto la formula dei trapezi.



DALLA FORMULA DEI TRAPEZI ALL'INTEGRALE DEFINITO

$$A \approx \Delta x \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) \ldots + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$

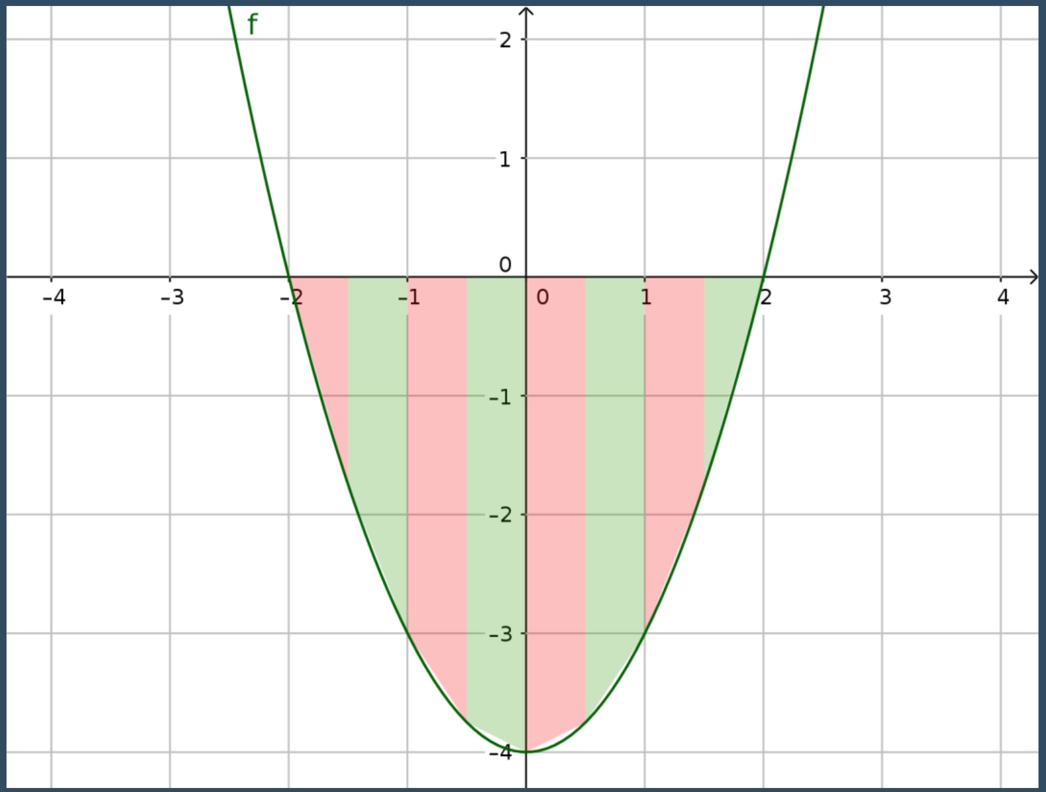
Se n è **molto grande** i due valori estremi diventano trascurabili e la formula può scriversi:

$$A \approx \sum_{i=0}^{n} f(x_i)\, dx$$

Se n **è infinitamente grande** Δx diventa un infinitesimo dx e il simbolo di somma viene sostituito dal simbolo di Leibniz, una esse stilizzata con gli estremi sopra e sotto:

$$A = \int_a^b f(x) dx$$

è la notazione di Leibniz che a differenza di quella di derivata è arrivata tale e quale al XXI secolo.



IL TEOREMA FONDAMENTALE DELL'ANALISI

$$A \approx \Delta x \left(\frac{f(x_0)}{2} + f(x_1) + f(x_2) \ldots + \frac{f(x_n)}{2} \right)$$

Consideriamo la funzione area $F(x)$ che ritorna l'area compresa tra gli assi cartesiani il grafico della funzione $f(x)$ e la retta x=b.

Calcoliamo la derivata di F(b) usando la definizione:

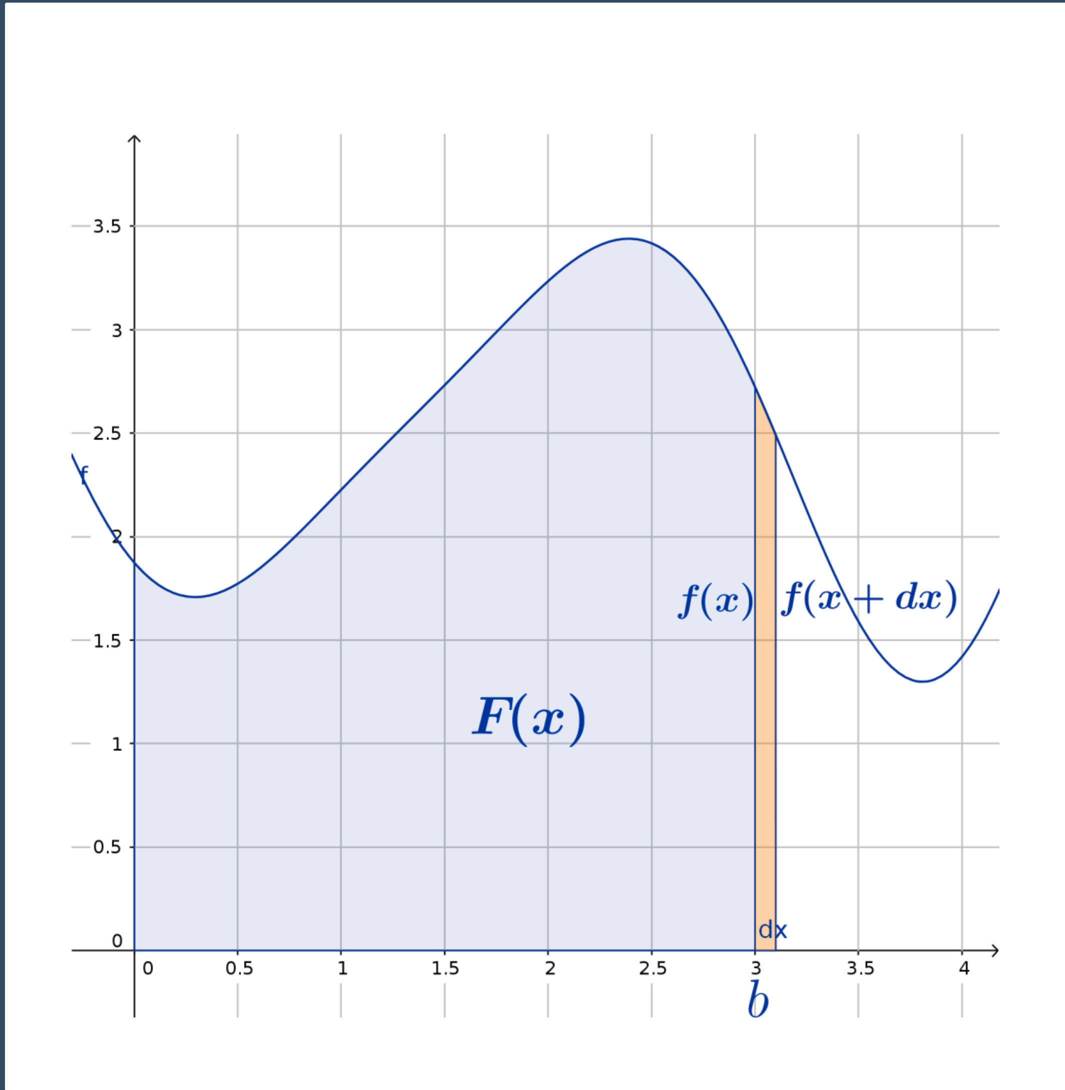
$$F'(b) = st\left(\frac{F(x+\varepsilon) - F(x)}{\varepsilon} \right)$$

Ma la differenza $F(b+\varepsilon) - F(b)$ non è altro che il valore dell'area infinitesima del rettangoloide evidenziato in arancio nella figura, che è indistinguibile dal prodotto, base per altezza, $f(x)dx$.

Quindi:

$$F'(x) = st\left(\frac{f(x)dx}{dx} \right) = f(x)$$

Dunque la funzione area $F(x)$ non è altro che la anti-derivata ovverosia l'integrale indefinito della funzione primitiva $f(x)$



IL CALCOLO INTEGRALE

Avendo concluso che

$$F'(x) = f(x)$$

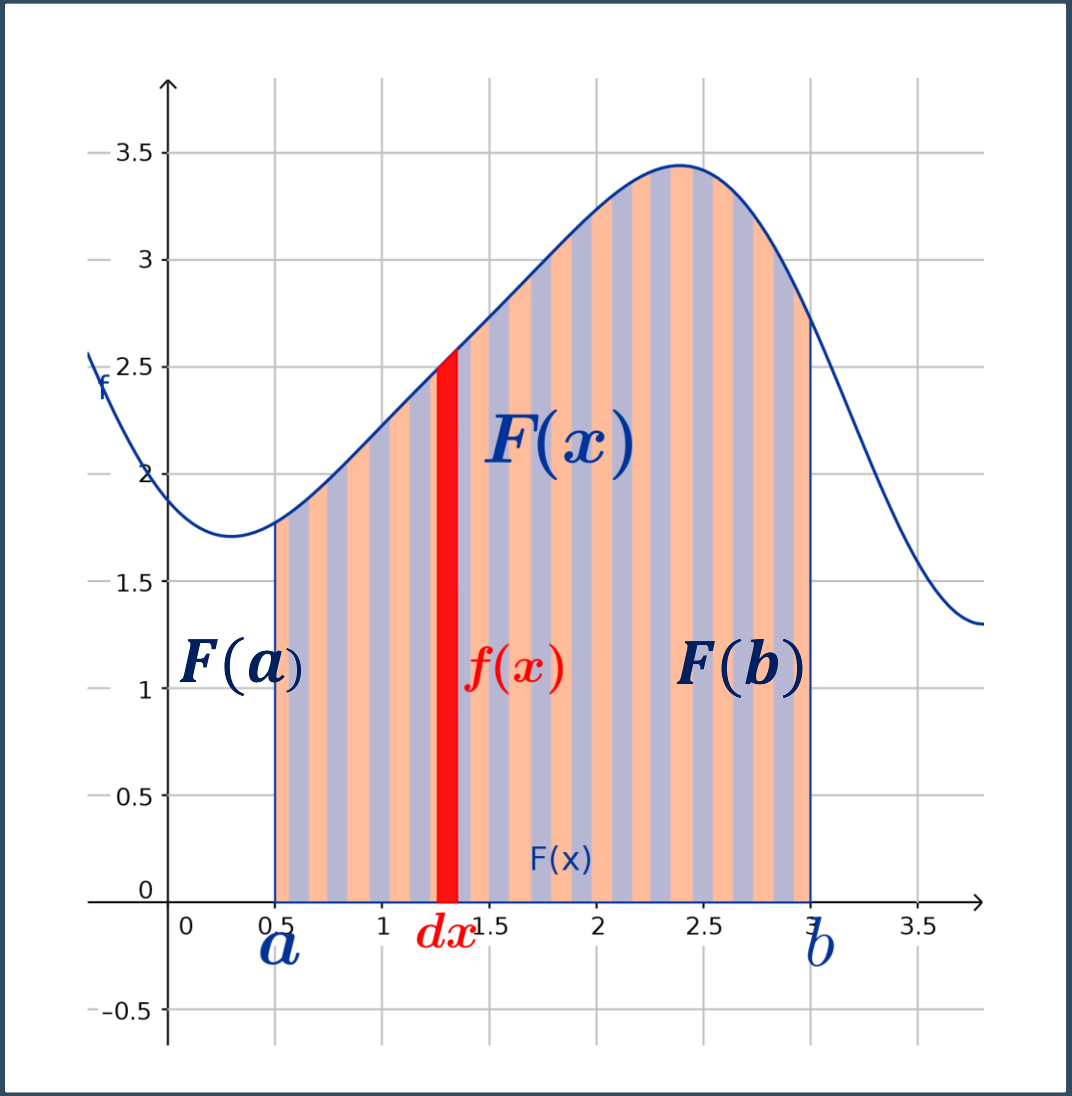
È ora possibile calcolare l'area sottesa alla funzione f(x) tra due valori $x = a$ ed $x = b$, alla sola condizione di conoscere la funzione $F(x)$ come anti-derivata di $f(x)$.

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Dalla figura a lato si vede che l'area sottesa è la differenza tra le due aree *F(b)* ed *F(a)* .

Fin qui si è ragionato sul primo quadrante segni positivi, se la curva è sotto l'asse delle x avrà valore negativo. Se poi fosse $b < a$ la somma risulterebbe negativa.

Insomma l'area risultante può anche essere negativa.



LA DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA
CHAIN RULE

Alla maniera di Leibniz

$$\frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}$$

Riveduta e corretta

$$st\left(\frac{dy}{dx}\right) = st\left(\frac{dy}{dt}\frac{dt}{dx}\right) = st\left(\frac{dy}{dt}\right)st\left(\frac{dt}{dx}\right)$$

E se fosse $dt = 0$?

DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA
UN ESEMPIO

Calcolare la derivata delle funzione $f(x) = e^{-x^2}$

$$\begin{cases} y = e^t \\ t = -x^2 \end{cases} \begin{cases} y' = e^t \\ t' = -2x \end{cases}$$

$$D_x\, e^{-x^2} = e^t(-2x) = -2xe^{-x^2}$$

Come nell’analisi classica? Dov’è la differenza?

Nessuna, da spiegare al commissario dell’esame,

Derivate e integrali sono sempre quelle.

DERIVATA DELLA FUNZIONE COMPOSTA UNO STRANO CASO

Domande in una prova scritta, qualche anno fa …

Calcola $D_x\, e^{-x^2}$ **La maggioranza risponde correttamente …**

Calcola $D_x\, e^2$ **La maggioranza risponde … $2e$ oppure e^2**

Uno studente risponde così

$$\begin{cases} y = e^t \\ t = 2 \end{cases} \begin{cases} y' = e^t \\ t' = 0 \end{cases}$$

$$D_x\, e^2 = e^t 0 = 0$$

Giusto!! Ma come valutare questa soluzione?

GRAZIE!

Grazie per l’attenzione!

BIBLIOGRAFIA

V. BENCI , *Alla scoperta dei numeri infinitesimi*, Aracne, Roma, 2019

R. COURANT-H. ROBBINS , *Che cos'è la matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, 2000

A CURA DI G.CANTELLI, *La disputa Leibniz-Newton sull'Analisi*, Bollati Boringhieri, Torino, 1958-2006

R. GOLDBLATT, *Lectures on the Hyperreals*, Springer, New York, 1998-1998

G. GOLDONI, *I numeri iperreali*, ilmiolibro.it, Roma, 2011-2011

G. GOLDONI, *Il calcolo delle differenze e il calcolo differenziale*, ilmiolibro.it, Roma, 2011-2011

G. GEYMONAT, *Note di matematica*, Politecnico di Torino, 1968

R. FERRAUTO, Lezioni di Analisi Matematica, Società editrice Dante Alighieri, Roma, 1983

J. HENLE - E. KLEINBERG, *Infinitesimal Calculus*, Dover, New York, 1979-2003

H. J. KEISLER, *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*, Prindle, Weber &Schmidt Inc., Boston, 1976-2013 → eBook

M. KLINE, *Calculus - An Intuitive and Physical Approach*, Dover, Mineola, NY, 1977-1998

A. M. ROBERT, *Nonstandard Analysis*, Dover, New York, 1988-2003

A. ROBINSON, *Non Standard Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1965-1995

SUL WEB

- Mathesis Verona, *MatematicaMente* - Rivista della sezione Mathesis di Verona; pubblica frequenti articoli sulla NSA.
- Mauro Di Nasso, *I numeri infinitesimi e l`Analisi Nonstandard*
- Paolo Bonavoglia, *Calcolo infinitesimale NSA* - Materiale didattico usato e aggiornato in questi ultimi anni nel liceo classico
- Richard O'Donovan, *Analysis with ultrasmall numbers*
- *MacTutor History of Mathematics* - A mia conoscenza, il miglior sito di storia della matematica sul web
    - J O'Connor and E F Robertson, *The number e (Mac Tutor History of Mathematics)* - Il numero e
    - J O'Connor and E F Robertson, *A history of Pi (Mac Tutor History of Mathematics)* - Storia di pi greco