

Osservazioni sulla retta di Eulero

Curve meccaniche generate dai punti notevoli di un triangolo parte prima

Dato un triangolo ABC si possono costruire i suoi punti notevoli: il baricentro G, punto di intersezione delle mediane, il circocentro O, punto di intersezione degli assi, e l'ortocentro H, punto di intersezione delle altezze. Si possono anche notare, al variare del triangolo ABC alcune proprietà dei punti notevoli elencati:

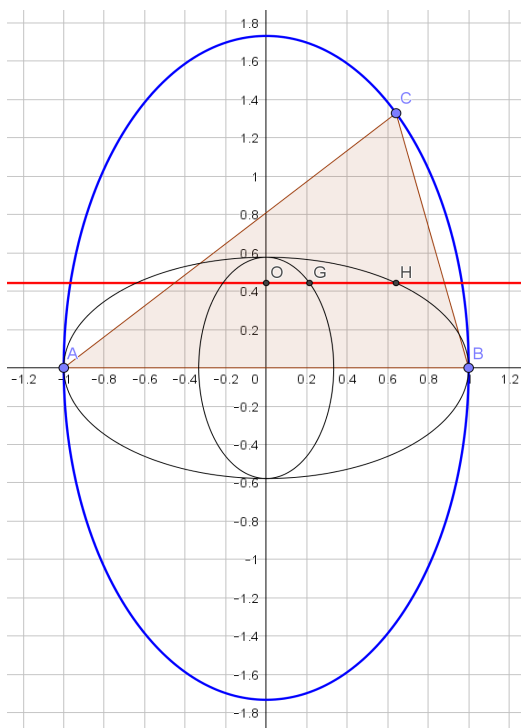
1. il baricentro G è sempre interno al triangolo
2. l'ortocentro è interno se il triangolo è acutangolo, coincide con un vertice se il triangolo è rettangolo (quello dove si incontrano i cateti), è esterno se il triangolo è ottusangolo
3. il circocentro è interno se il triangolo è acutangolo, si trova nel punto medio dell'ipotenusa se il triangolo è rettangolo (ed è quindi inscritto in una semicirconferenza), è esterno se il triangolo è ottusangolo
4. i tre punti sono sempre allineati e la retta che li attraversa è detta *retta di Eulero*
5. la distanza tra baricentro e ortocentro è sempre doppia rispetto alla distanza tra baricentro e circocentro, $HG = 2 OG$

La dimostrazione delle proprietà 4 e 5 risale al matematico svizzero Leonhard Euler ed è piuttosto semplice e si trova su molti libri di testo (l'originale di quella riportata qui si trova su "Court - College Geometry - Johnson, Richmond, 1952" a pagina 104).

Si consideri il triangolo costruito sui punti medi dei lati di ABC, diciamo $M_1M_2M_3$. Com'è noto il baricentro di tale triangolo coincide con quello di ABC mentre l'ortocentro, trovandosi le altezze di $M_1M_2M_3$ a giacere sugli assi di ABC, coincide con il circocentro di ABC. Dalla proprietà delle mediane per cui $AG = 2M_1G$, $BG = 2M_2G$, $CG = 2M_3G$ si ricava che i due triangoli si corrispondono nell'omotetia inversa di rapporto $k = -2$ e centro G. Dunque all'ortocentro di ABC corrisponde l'ortocentro di $M_1M_2M_3$ che come già visto è proprio O, il circocentro di ABC il quale si trova quindi allineato con H e G proprio in virtù dell'omotetia suddetta, per cui si ha inoltre che $HG = |k| OG = 2 OG$.

Si vuole qui mettere in luce una particolare proprietà della retta di Eulero: essa è sempre parallela ad uno dei lati del triangolo, sia AB, se il vertice opposto C si trova su un'ellisse che ha come asse minore il lato AB e il semiasse maggiore uguale all'altezza del triangolo equilatero costruito su quel lato, quindi uguale a $\frac{\sqrt{3}}{2} AB$.

Si consideri il triangolo equilatero ABC e si costruisca una ellisse che ha per asse minore uno dei lati e per asse maggiore il doppio dell'altezza relativa a quel lato. Chiameremo quest'ellisse *primaria*. Ad esempio, nel piano cartesiano si può costruire il triangolo di vertici $(-1,0)$, $(1,0)$ e $(0,\sqrt{3})$ inscritto nell'ellisse di centro O e fuochi $(0,\sqrt{11}/2)$, $(0,-\sqrt{11}/2)$. Se ora si muove il vertice del triangolo che si trova sull'asse maggiore si avrà una serie di triangoli che hanno la particolarità di avere sempre la retta di Eulero in direzione parallela al lato che giace sull'asse minore dell'ellisse. Si osserva poi che il circocentro appartiene sempre all'asse maggiore, il baricentro e l'ortocentro si muovono invece anche loro su ellissi: la prima con asse maggiore uguale all'asse minore dell'ellisse primaria e asse minore uguale a un terzo dell'asse maggiore primario, la seconda invece in relazione con la primaria attraverso una omotetia di centro l'origine e rapporto $1/3$.



La dimostrazione di questo fatto è piuttosto semplice e discende da un semplice calcolo della pendenza della retta di Eulero e dalla condizione per cui essa sia zero al variare del vertice superiore del triangolo.

Manteniamo fissati A e B agli estremi dell'asse minore e facciamo variare il vertice $C(x_C, y_C)$ per verificare poi che

esso appartiene all'ellisse di equazione $x^2 + \frac{y^2}{3} = 1$. Il

baricentro di tale triangolo avrà coordinate $G\left(\frac{x_C}{3}, \frac{y_C}{3}\right)$

mentre per il circocentro dobbiamo fare qualche calcolo. Il punto medio del lato AC, diciamo M_1 , ha coordinate

$M_1\left(\frac{x_C-1}{2}, \frac{y_C}{2}\right)$ mentre la pendenza del lato AC è

$m_{AC} = \frac{y_C}{x_C+1}$. Da questo ricaviamo l'equazione dell'asse

di AC: $y - \frac{y_C}{2} = -\frac{x_C+1}{y_C} \left(x - \frac{x_C-1}{2}\right)$. Per trovare le

coordinate del circocentro bisogna intersecarlo con l'asse y che è l'asse del lato AB, quindi con $x=0$ e si ottiene $O\left(0, \frac{x_C^2-1}{2} + \frac{y_C}{2}\right)$.

Calcoliamo ora la pendenza della retta di Eulero in questo sistema di coordinate usando i punti O e G appena calcolati:

$$m_E = \frac{\frac{x_C^2-1}{2y_C} + \frac{y_C}{6}}{-\frac{x_C}{3}} = \frac{6(x_C^2-1) + 2y_C^2}{-4x_C y_C}$$

Segnaliamo subito che questo valore non esiste se una coordinata del punto C è nulla, ma questo corrisponde ai due casi estremi in cui se $x_C=0$ il triangolo è equilatero, tutti i punti notevoli coincidono e quindi la retta di Eulero non è definita, mentre se $y_C=0$ il triangolo è degenerato in un segmento.

Questo valore della pendenza può essere uguale a zero solo nel caso in cui il numeratore si annulli, e questo significa che le coordinate del punto C devono rispettare l'equazione $6(x_C^2-1) + 2y_C^2 = 0$

che riordinando i termini risulta proprio soddisfare l'equazione dell'ellisse $x_C^2 + \frac{y_C^2}{3} = 1$. CVD

Per completezza riportiamo l'equazione della retta di Eulero per intero:

$$y - \frac{y_C}{3} = -\frac{6(x_C^2-1) + 2y_C^2}{4x_C y_C} \left(x - \frac{x_C}{3}\right)$$