3 – 10 aprile 2019 – IIS Algarotti, Venezia

Numeri iperreali

A cura di Giuseppe Zambon

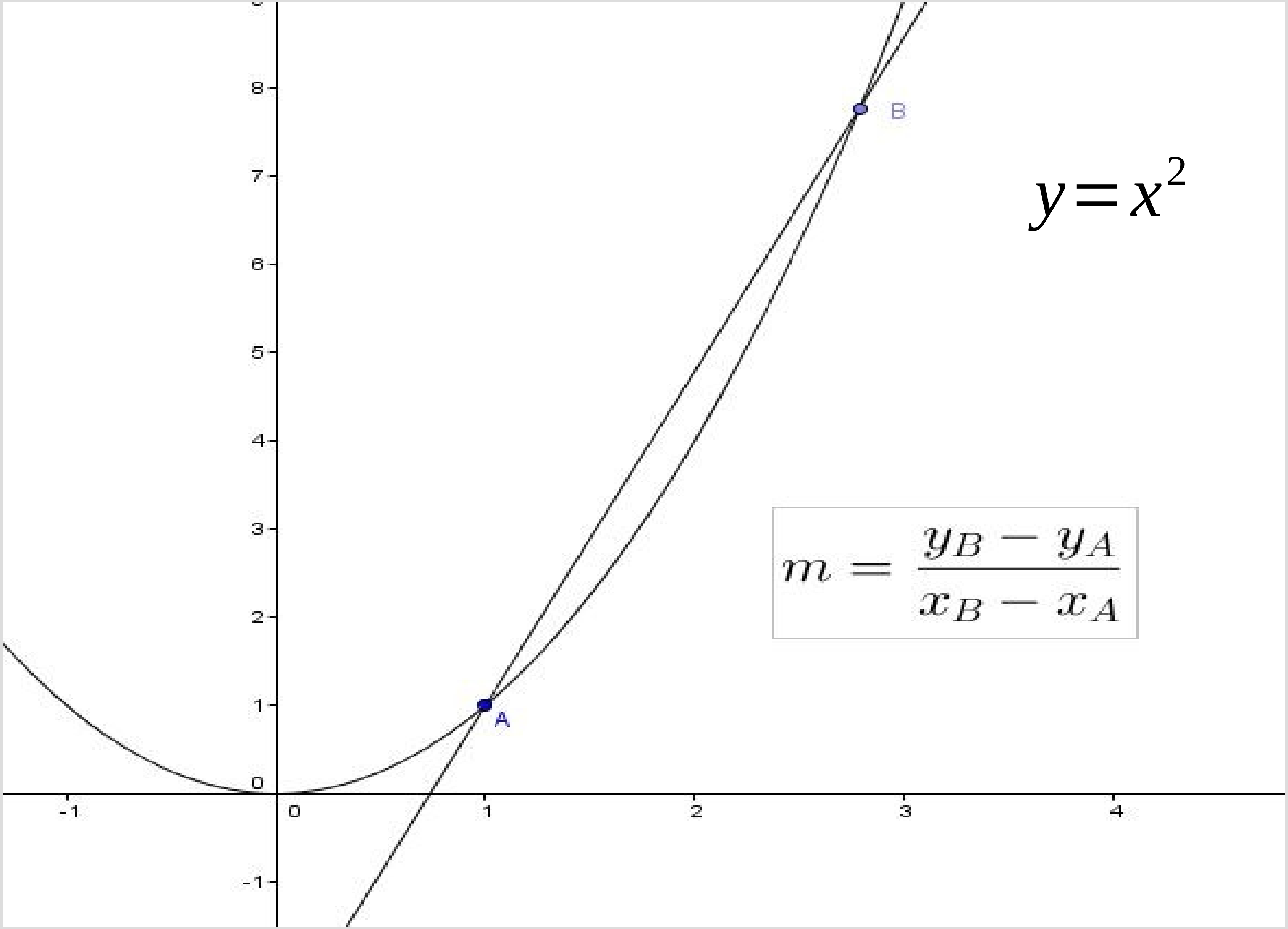
Contenuti e disegni sono tratti dai libri del prof. Apotema, alias Giorgio Goldoni

LA TANGENTE A UNA CURVA

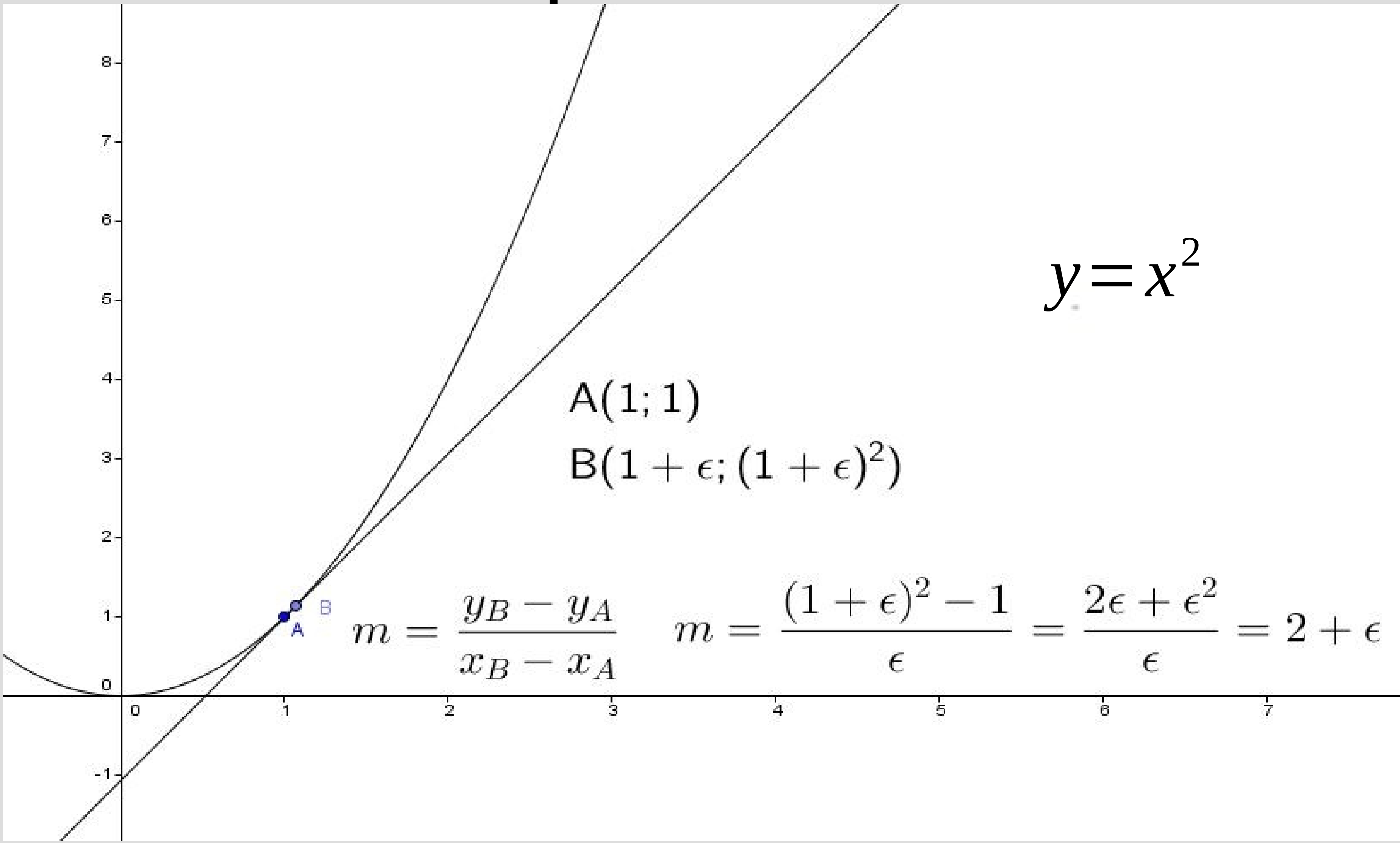
L’interesse per la determinazione della retta tangente ad una curva nasceva sia dalla sua lettura come problema puramente geometrico che per le applicazioni nel campo dell’ottica. Questa scienza era uno dei principali interessi del XVII secolo e la progettazione delle lenti interessava direttamente Fermat, Descartes, Huygens e Newton. Per studiare il passaggio della luce attraverso una lente bisogna conoscere l’angolo di incidenza per poter applicare le leggi di rifrazione. L’angolo in questione è quello tra il raggio luminoso e la normale alla superficie della lente, che può essere determinata in quanto è perpendicolare alla tangente. Il problema quindi era trovare una delle due rette (la tangente o la normale). In realtà erano gia noti dall’antichità alcuni metodi per determinare le tangenti ad alcune curve particolari, ma mancava un metodo generale.

DETERMINAZIONE DI MASSIMI E MINIMI
CINEMATICA

Esempi introduttivi



Esempi introduttivi



“...si divida per ε e sia diminuita la quantità ε all’infinito e trascurati i termini evanescenti…”

Methodus fluxionum serie infinitarum I. Newton

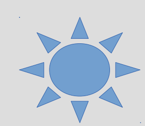
I numeri iperreali

POSTULATO DI ARCHIMEDE

Dati due segmenti diversi, esiste sempre un multiplo del minore che supera il maggiore

I numeri iperreali

0 1 2 3

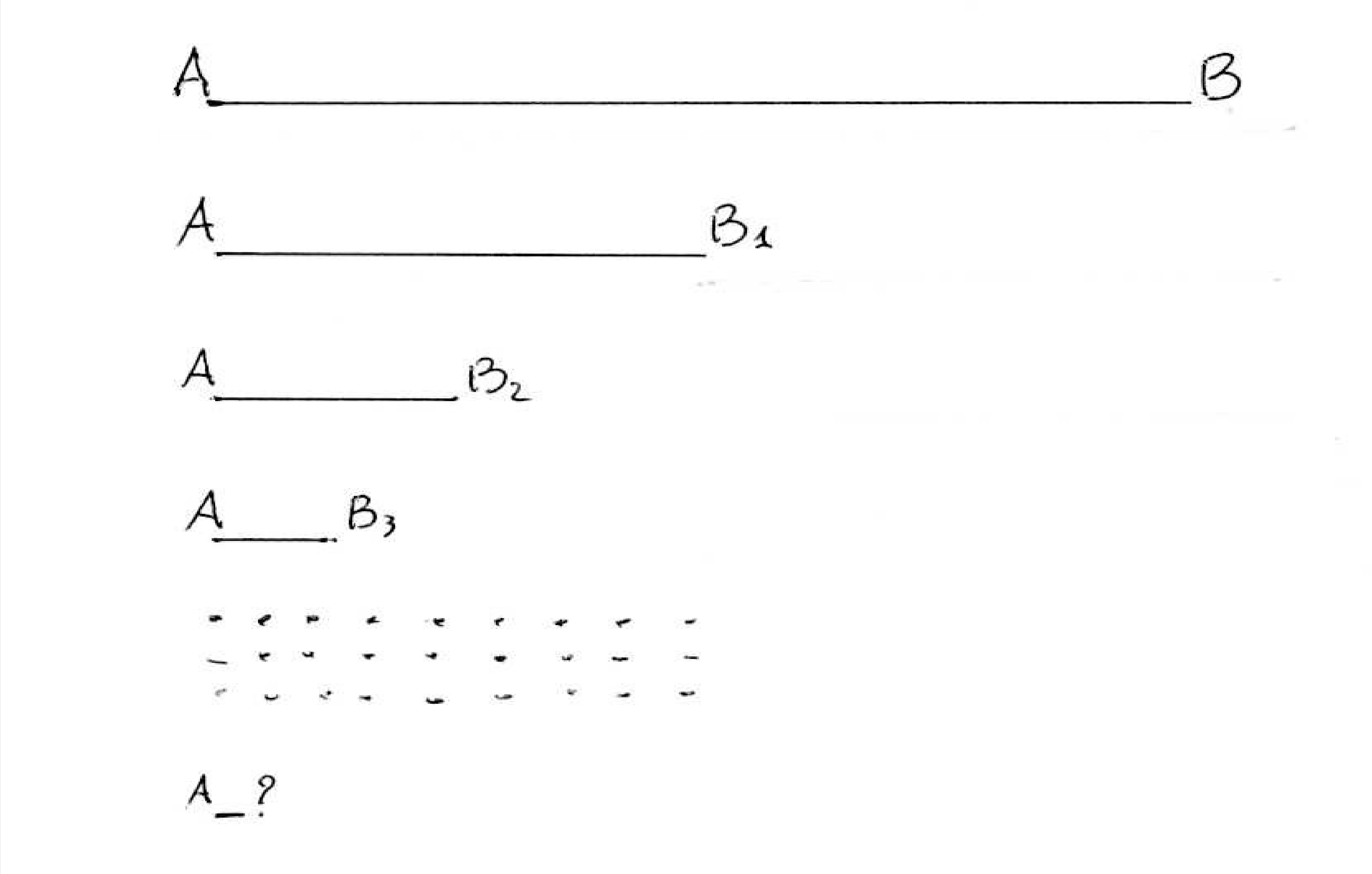


I numeri iperreali

POSTULATO DI ARCHIMEDE

Dati due segmenti diversi esiste sempre un sottomultiplo del maggiore che è più piccolo del minore

I numeri iperreali



“La possibilità di misurare tutte le dimensioni e tutte le distanze dell'universo (da quelle dei corpi celesti a quelle che costituiscono il mondo atomico) riportando una volta dopo l'altra una data lunghezza terrestre, non è per nulla una pura conseguenza logica dei nostri teoremi sulle congruenze o della configurazione geometrica. ..... La validità del postulato di Archimede nel mondo della natura richiede una conferma sperimentale, né più né meno di quanto la richieda il postulato delle parallele.”

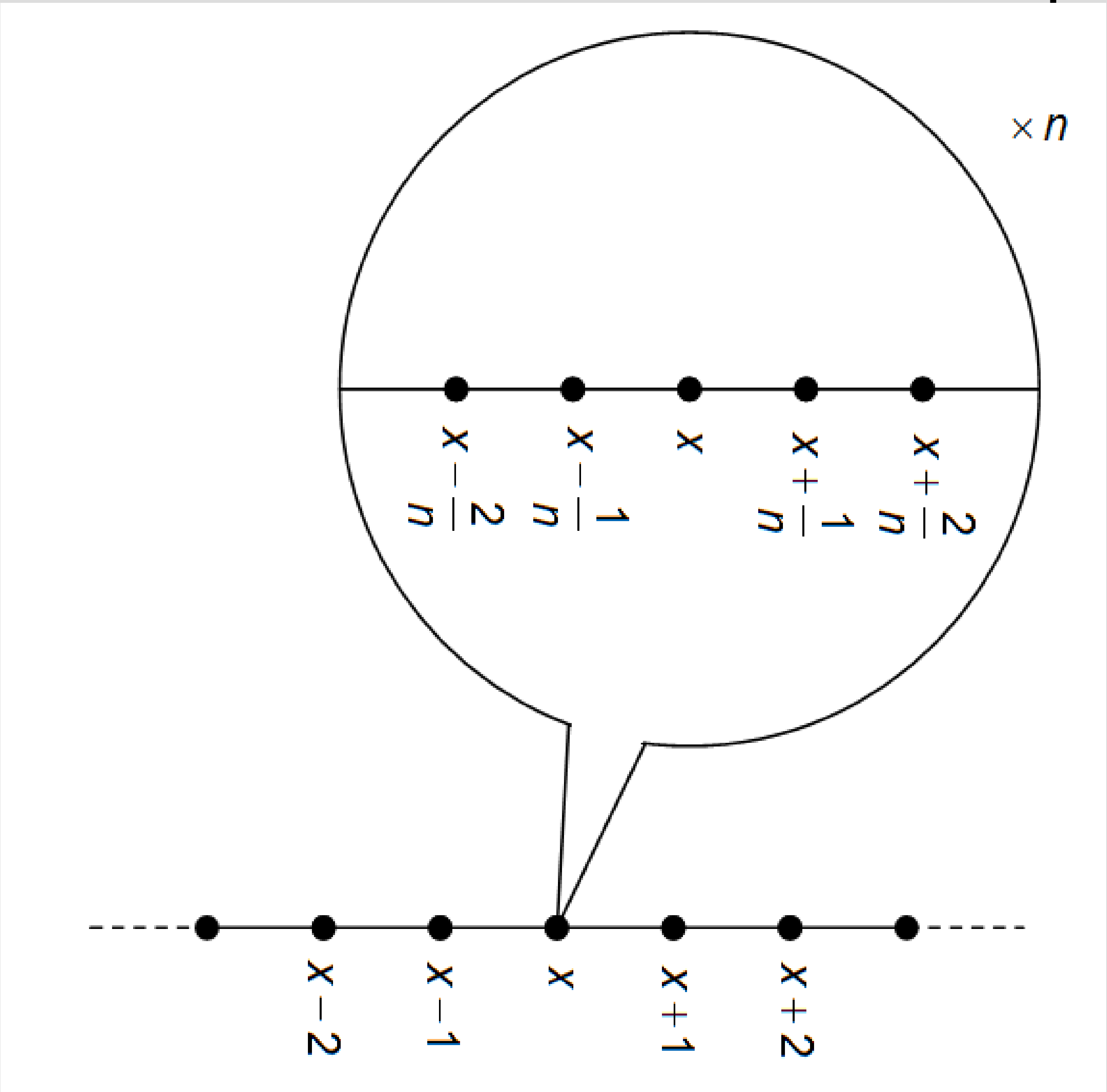
David Hilbert

Infiniti e infinitesimi

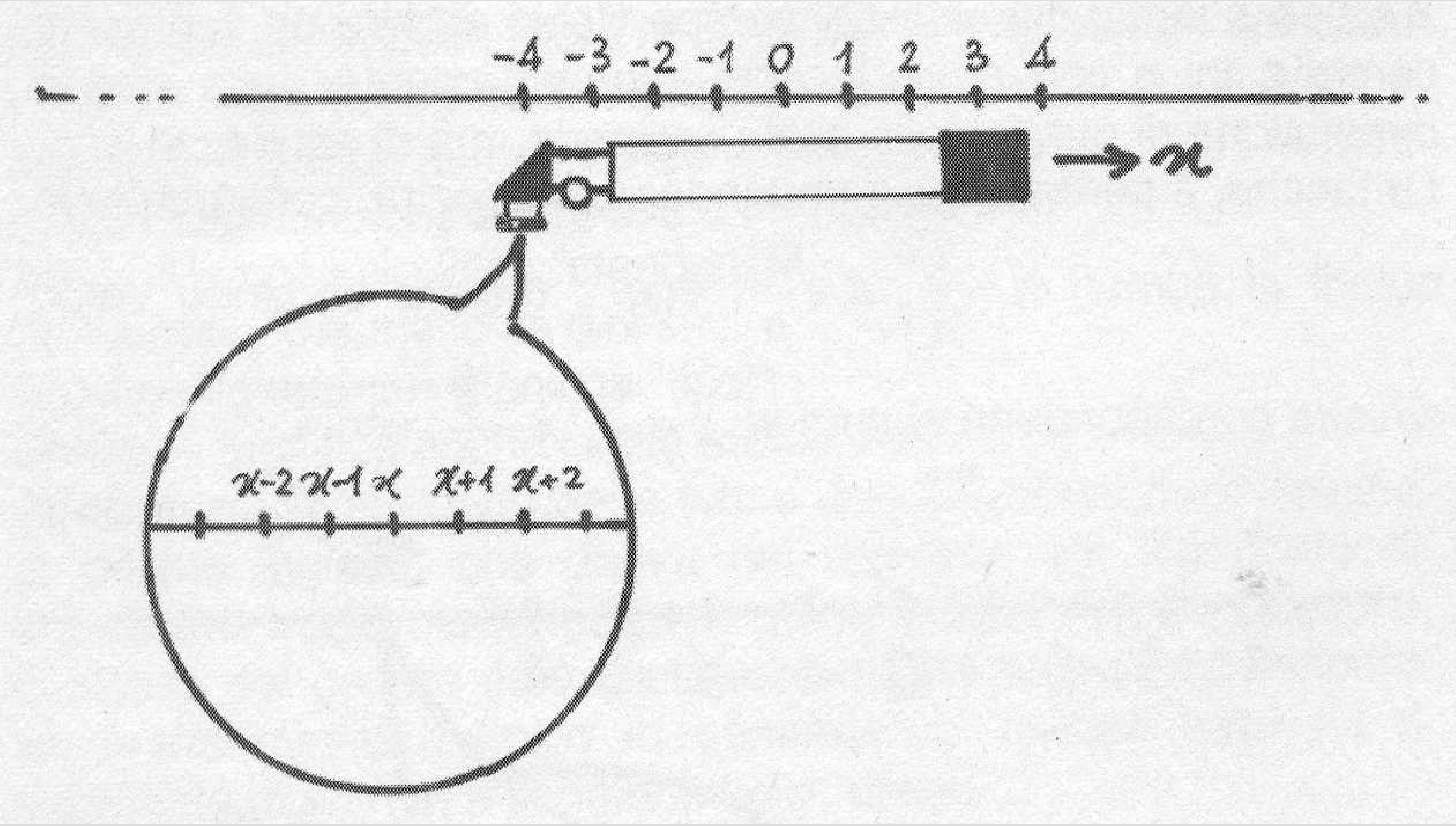
Il numero ε è **infinitesimo** se in valore assoluto esso è minore di ogni numero reale (standard) positivo

Il numero M è **infinito** se in valore assoluto esso è maggiore di ogni numero reale (standard) positivo

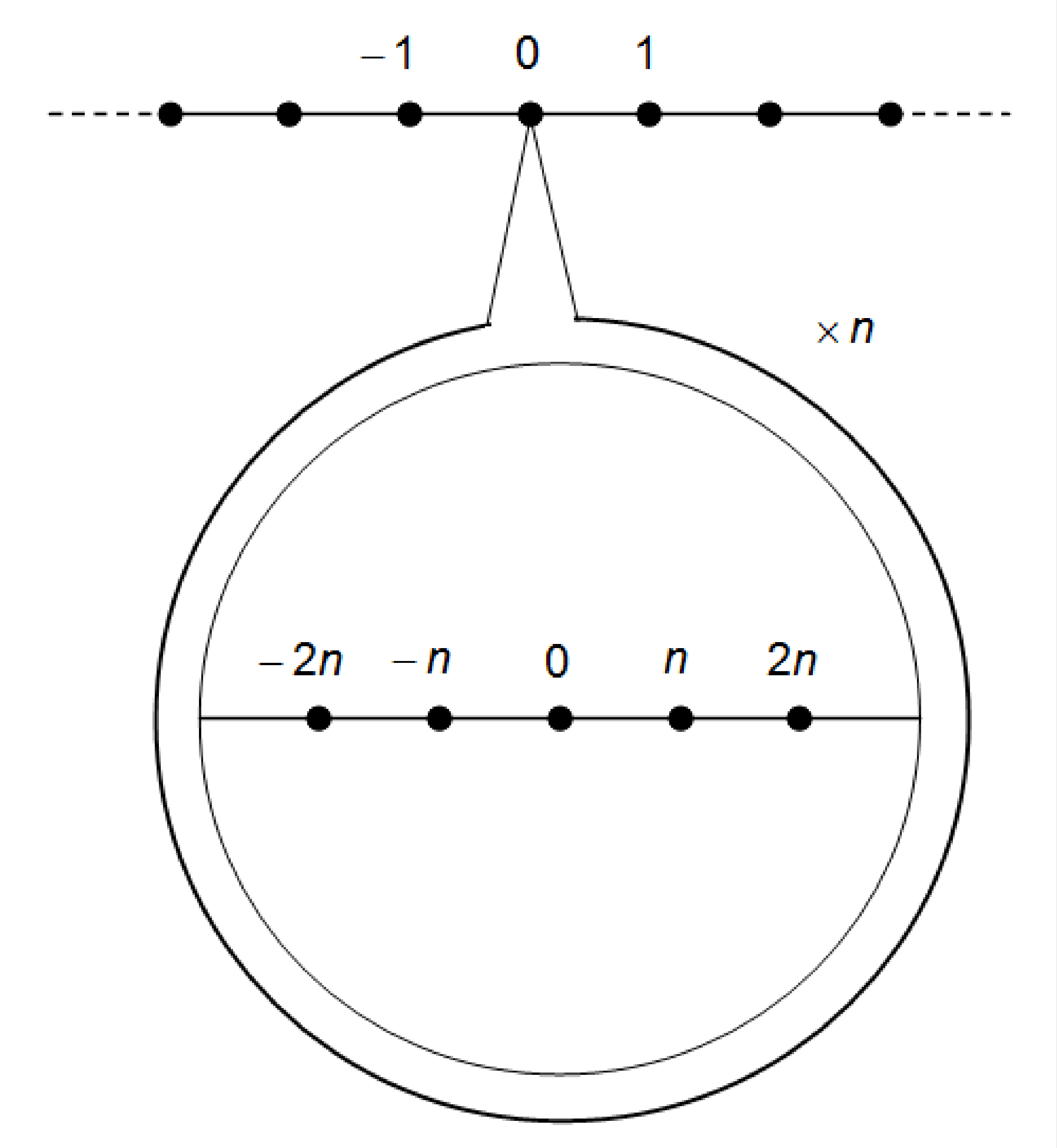
Strumenti ottici ideali: il microscopio



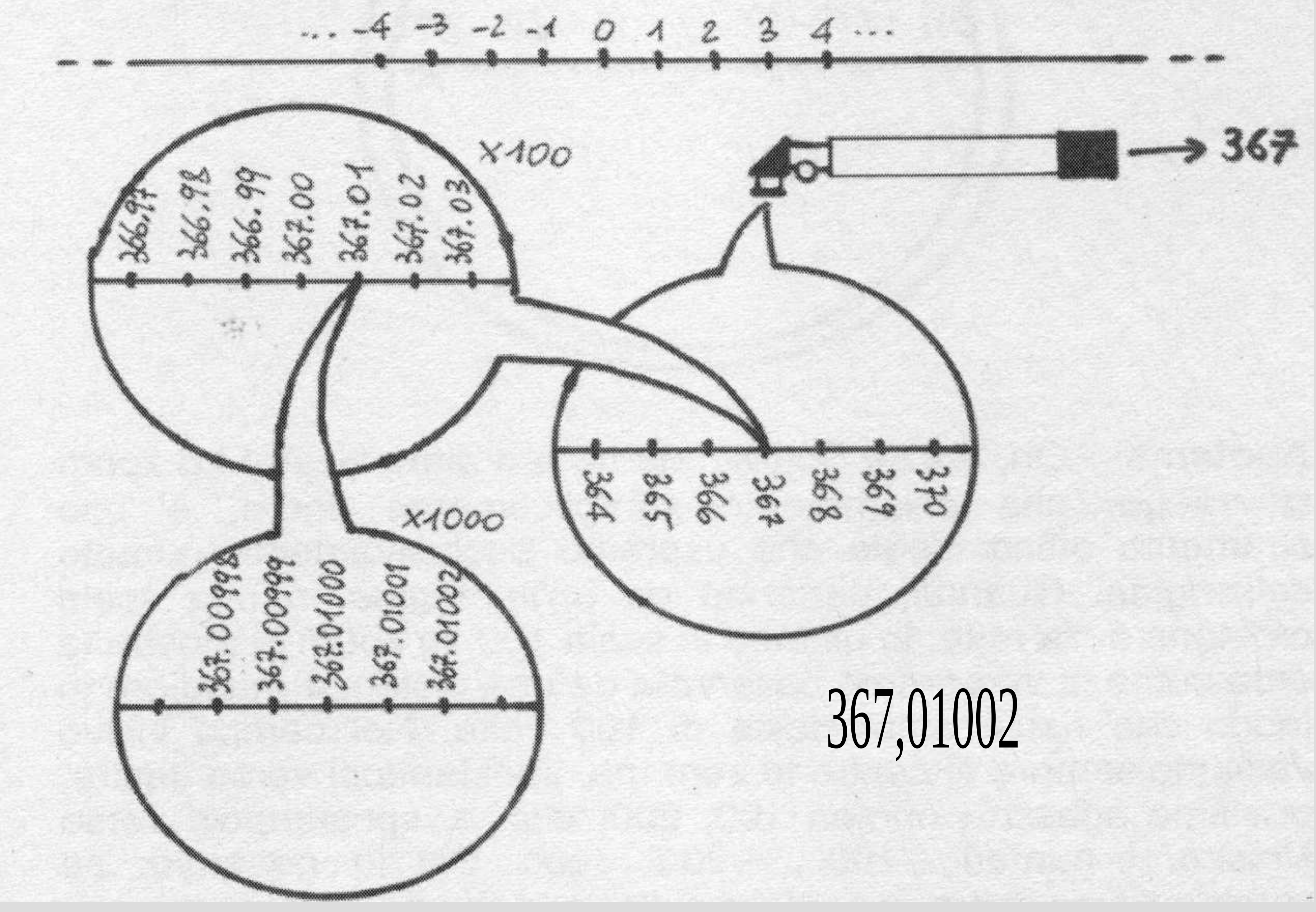
Strumenti ottici ideali: il telescopio



Strumenti ottici ideali: lo zoom

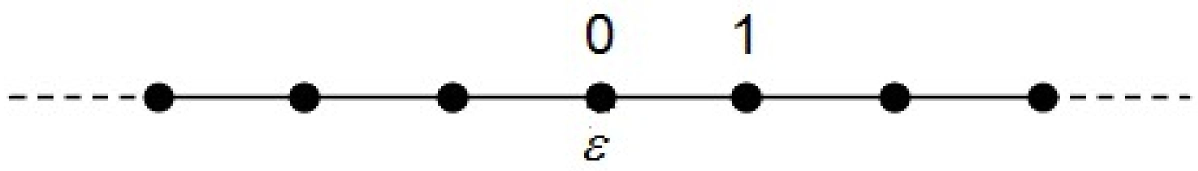


Visualizzazione di un numero reale

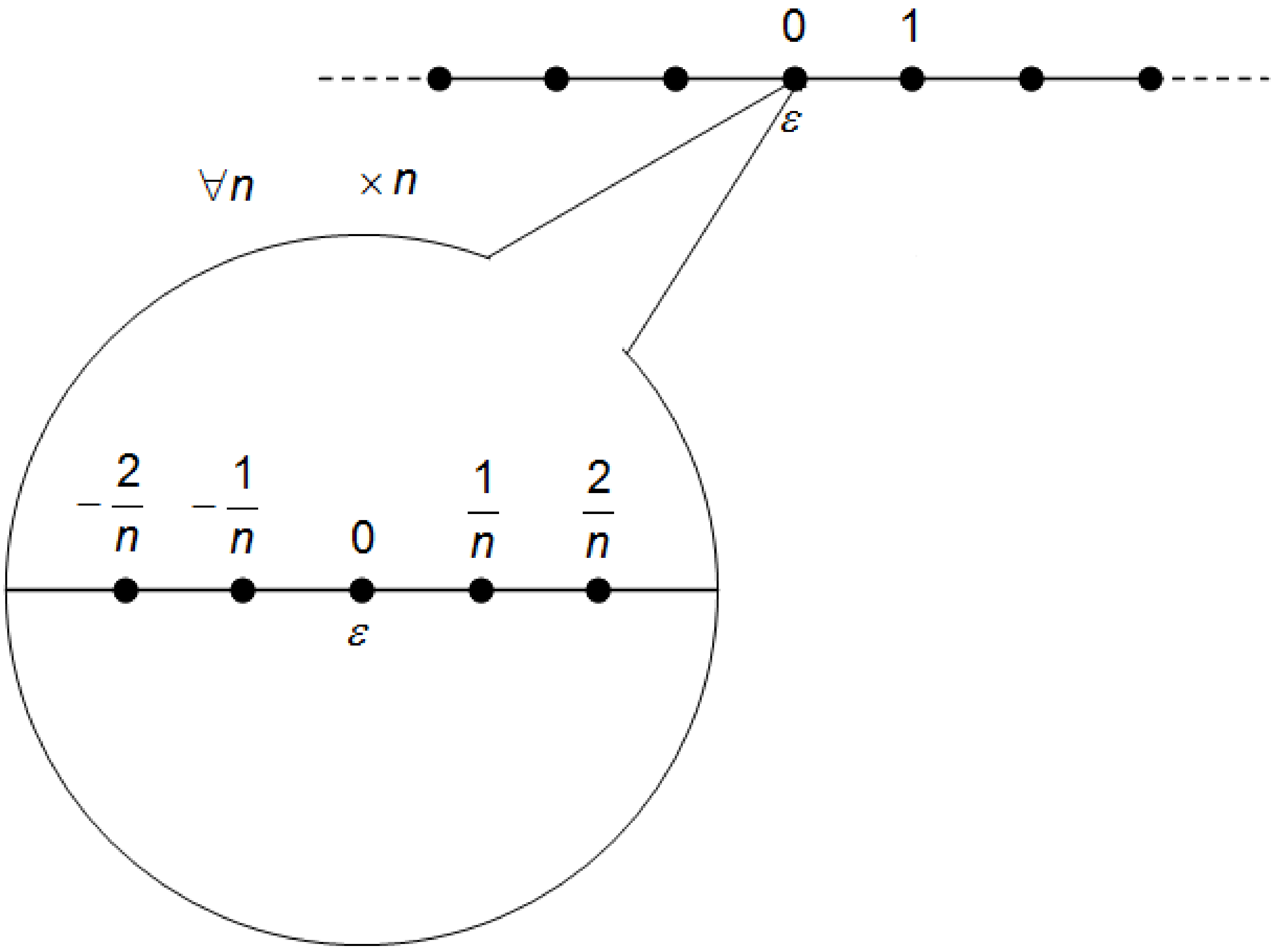


367,01002

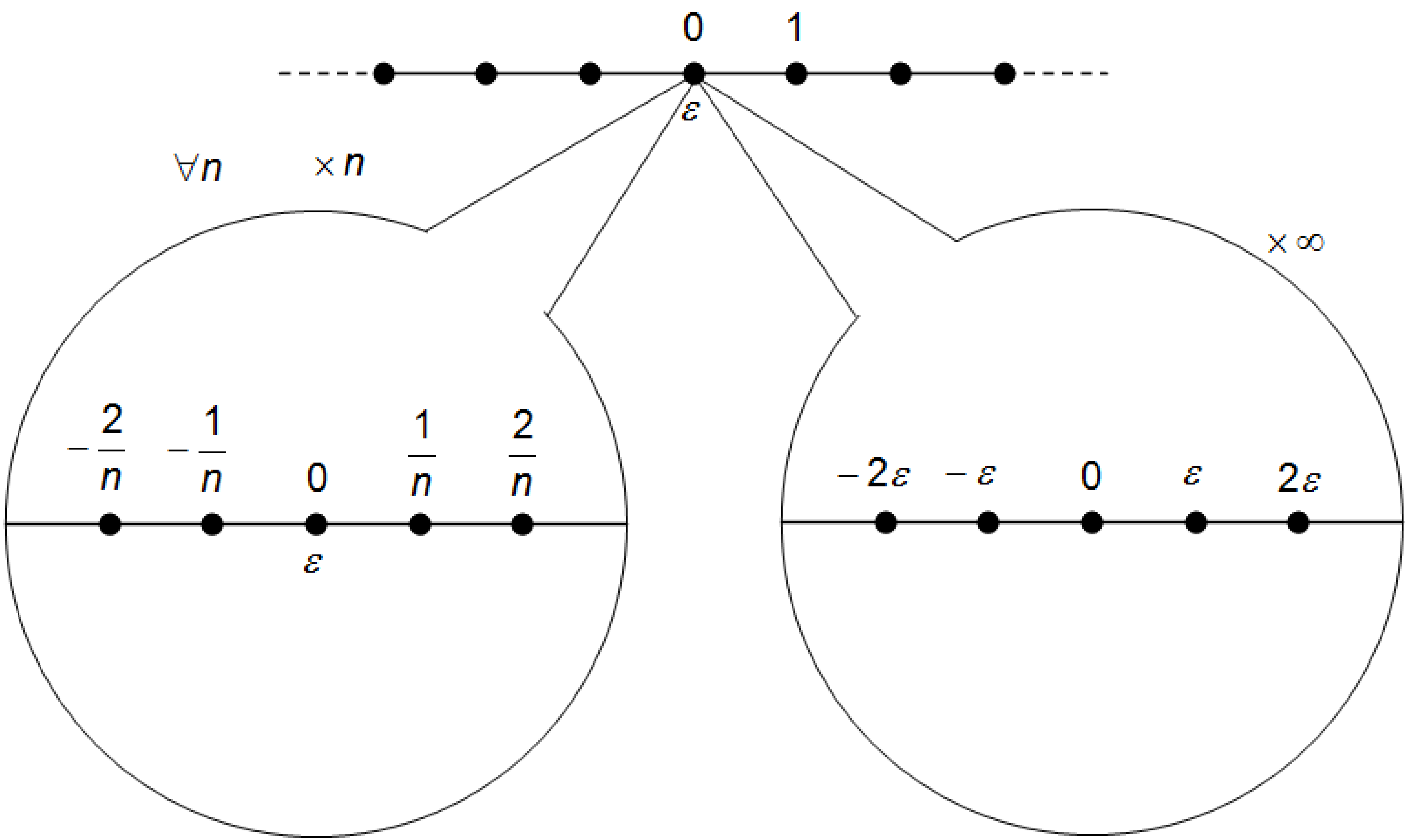
Visualizzazione di un numero infinitesimo



Visualizzazione di un numero infinitesimo

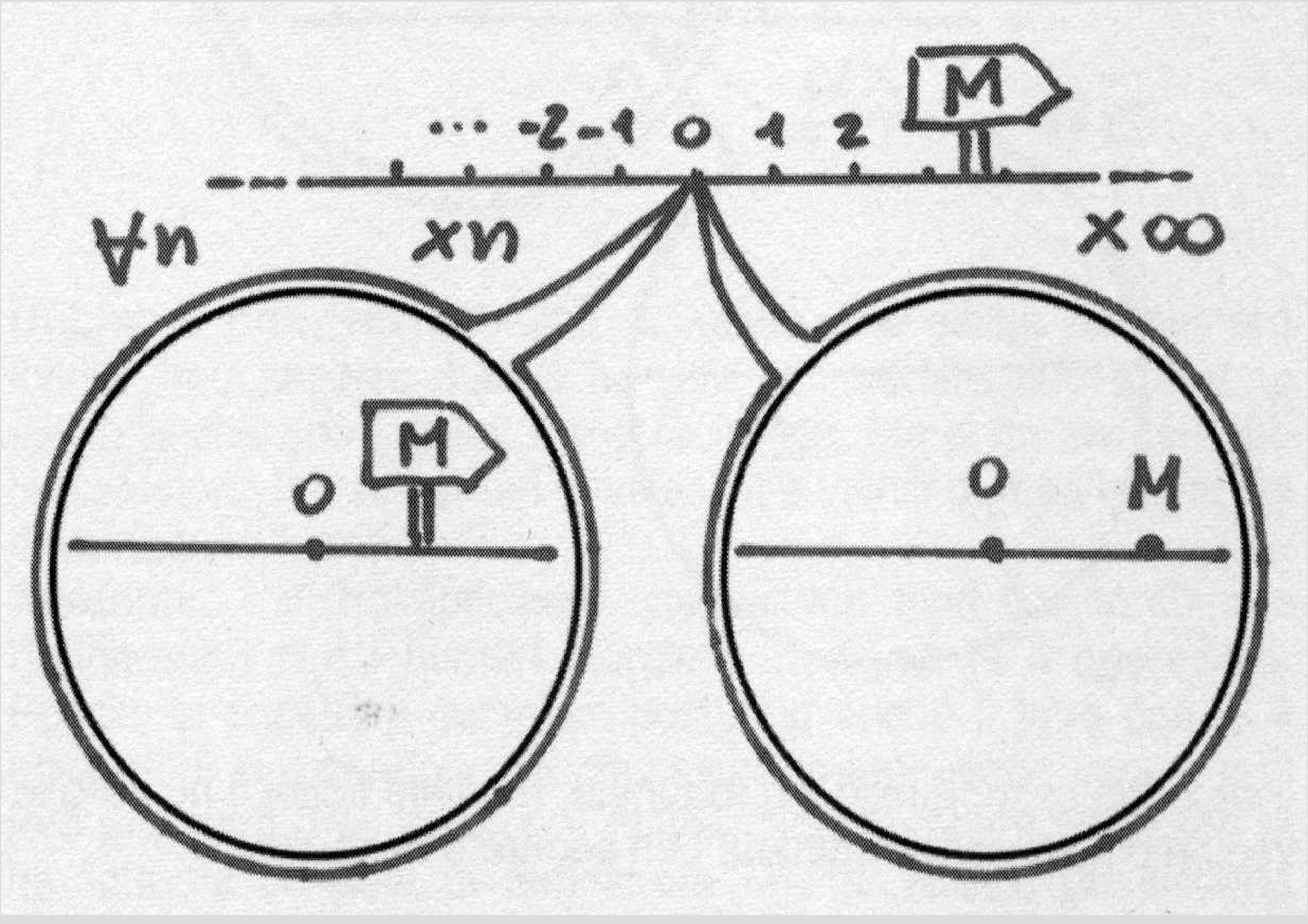


Visualizzazione di un numero infinitesimo



Microscopio non standard

Visualizzazione di un numero infinito



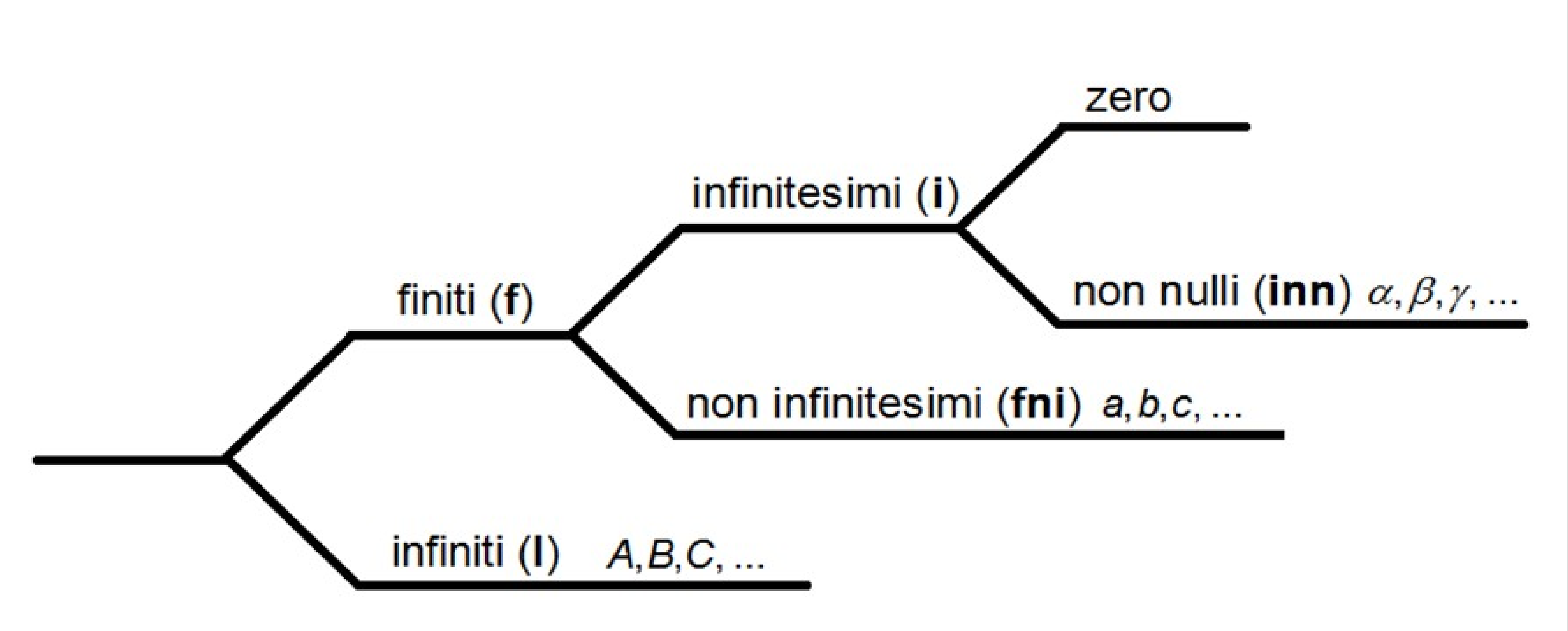
Classificazione dei numeri iperreali

Un numero **finito** è un numero in valore assoluto minore di almeno un numero standard

Un numero **non infinitesimo** è un numero in valore assoluto maggiore di almeno un numero standard positivo

Un numero **finito non infinitesimo** è un numero in valore assoluto compreso tra due numeri standard positivi

Classificazione dei numeri iperreali



Algebra dei numeri iperreali

Ai numeri iperreali si estendono le usuali operazioni algebriche

+	inn	fni	I
inn	i	fni	I
fni		f	I
I			?

×	inn	fni	I
inn	inn	inn	?
fni		fni	I
I			I

x	$\frac{1}{x}$
inn	I
fni	fni
I	inn

Algebra dei numeri iperreali

$$\left(M + \epsilon \right) + \left(-M \right) = \epsilon$$

$$\left(2M \right) + \left(-M \right) = M$$

$$\left(M + a \right) + \left(-M \right) = a$$

$$\left(M \right) + \left(-M \right) = 0$$

Stabilire il tipo di un'espressione iperreale

$$\frac{a\,M}{a+M} \qquad\qquad \frac{fni\cdot I}{fni+I}=\frac{I}{I}\ ?$$

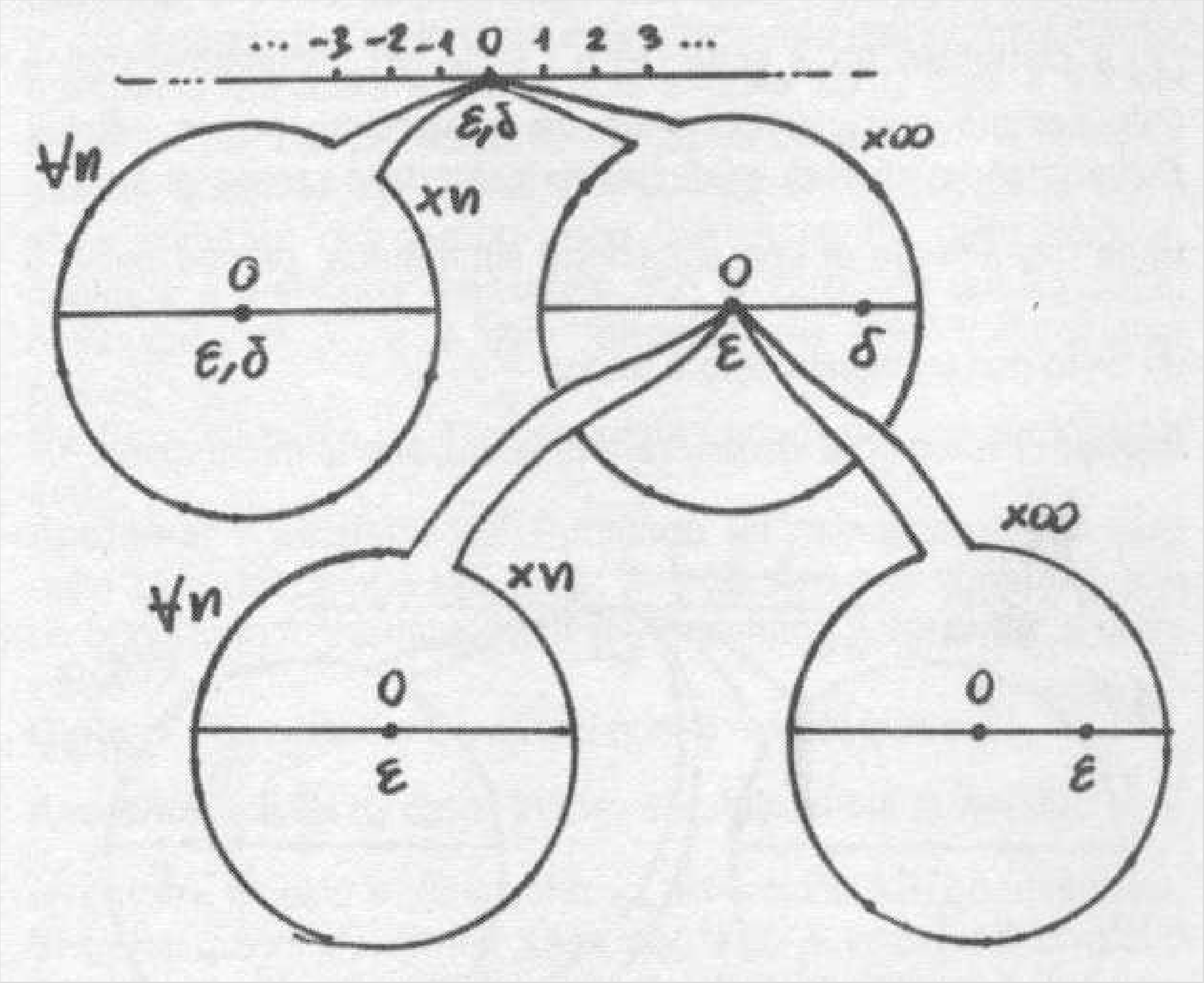
$$\frac{a\,M}{a+M}=\frac{a\,M}{M\cdot\left(\frac{a}{M}+1\right)}=\frac{a}{\frac{a}{M}+1}$$

$$\frac{fni\cdot I}{I\cdot\left(\frac{fni}{I}+fni\right)}=\frac{fni}{inn+fni}=\frac{fni}{fni}=fni$$

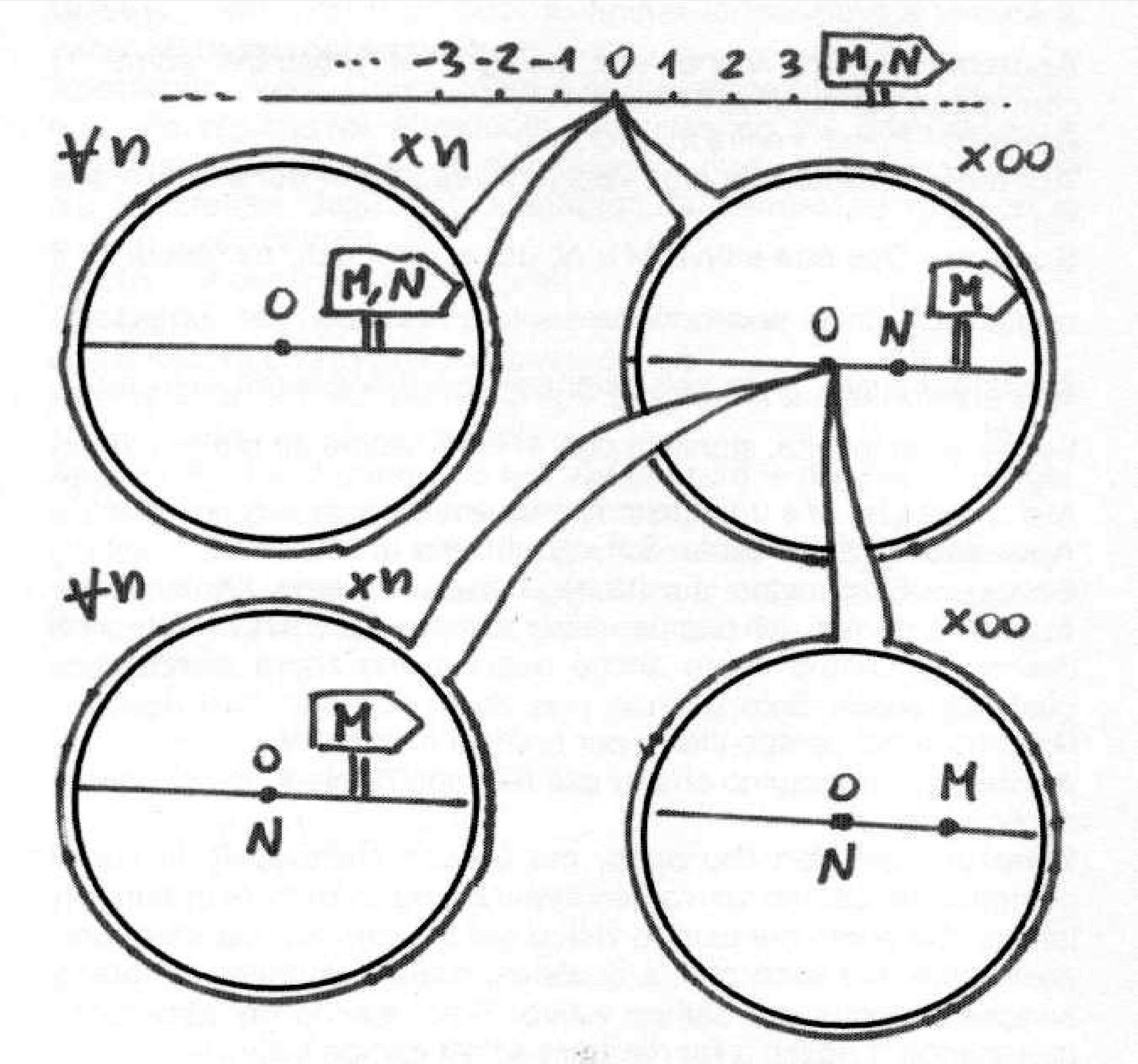
Confronto di infinitesimi e di infiniti

$$\frac{\varepsilon}{\delta} = \begin{cases} \textit{inn} & \varepsilon \text{ è di ordine superiore a } \delta \\ \textit{fni} & \varepsilon \text{ è dello stesso ordine di } \delta \\ \textit{I} & \varepsilon \text{ è di ordine inferiore a } \delta \end{cases}$$

Confronto di infinitesimi



Confronto di infiniti



Monadi

Due numeri si dicono infinitamente vicini se la loro differenza è un infinitesimo.

$$x \approx y$$

Si chiama monade del numero x l'insieme dei numeri infinitamente vicini a x.

$$mon(x)$$

Se puntiamo un microscopio un non-standard sul numero x, vediamo solo numeri appartenenti alla monade di x.

Parte standard

Ogni monade contiene al più un numero standard.

Ogni numero finito può essere scritto in modo unico nella forma

$x = s + \delta$ con $s \in \mathbb{R}$ e $\delta \in mon(0)$

s si chiama *parte standard* di x

$$s = St[x]$$

Numeri indistinguibili

Due numeri **non nulli** si dicono **<u>indistinguibili</u>** se la loro differenza è infinitesima rispetto a ciascuno di essi o, in modo equivalente, se il loro rapporto è infinitamente vicino a 1.

$$x \sim y$$

$$\frac{x-y}{x} \approx 0 \qquad \frac{x-y}{y} \approx 0 \qquad \frac{x}{y} \approx 1$$

Numeri indistinguibili

Anche per la relazione di indistinguibilità esiste una semplice e chiara visualizzazione sulla retta iperreale.

Due numeri sono *indistinguibili* se osservati a una scala in cui essi sono visibili e separati dallo 0, sembrano coincidere.
(cioè possono essere separati solo con uno strumento non standard)

Numeri indistinguibili

ϵ e $\epsilon+\epsilon^2$ sono indistinguibili

ϵ e 2ϵ non sono indistinguibili

M e $2M$ non sono indistinguibili

M^2 e M^2+M sono indistinguibili

Numeri indistinguibili: proprietà

$\varepsilon+\delta \sim \varepsilon$ se $\delta=o(\varepsilon)$

$a+\varepsilon \sim a$

$M+\varepsilon \sim M$

$M+a \sim M$

$M+N \sim M$ se $N<<M$

Esempi di uso della relazione di indistinguibilità nel calcolo della parte standard

$$\frac{a\cdot\epsilon}{a+\epsilon}\sim\frac{a\cdot\epsilon}{a}=\epsilon\approx 0$$

$$\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot x}{a+x}$$

$$\frac{a\cdot M}{a+M}\sim\frac{a\cdot M}{M}=a$$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot x}{a+x}$$

Esempi di uso della relazione di indistinguibilità nel calcolo della parte standard

$$St\left[\frac{a\cdot\epsilon}{a+\epsilon}\right]=St\left[\frac{a\cdot\epsilon}{a}\right]=St[\epsilon]=0$$

$$St\left[\frac{a\cdot M}{a+M}\right]=St\left[\frac{a\cdot M}{M}\right]=St[a]=a$$

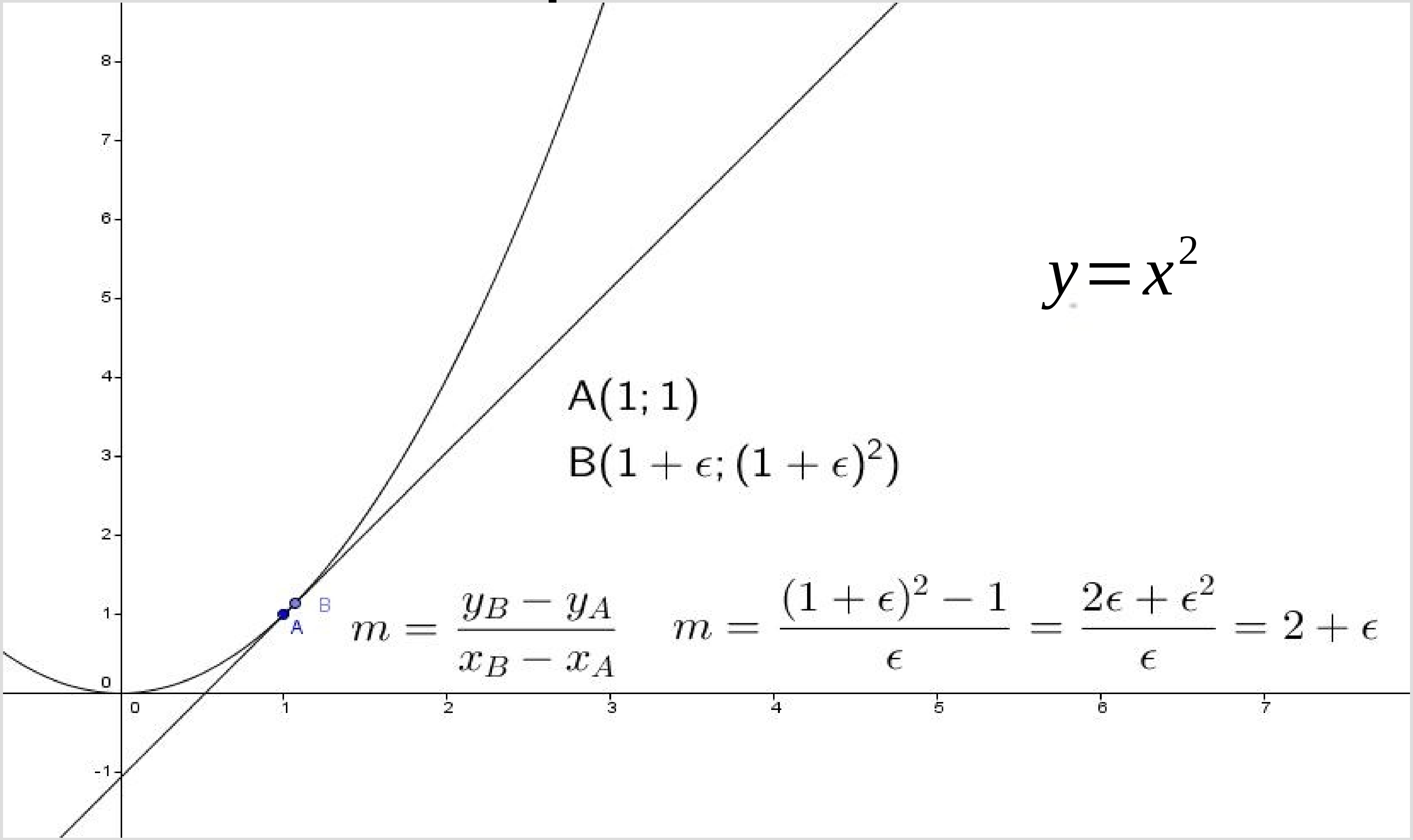
$$\lim_{x\to 0}\frac{a\cdot x}{a+x}$$

Esempi di uso della relazione di indistinguibilità nel calcolo della parte standard

$$m = St\left[\frac{(1+\epsilon)^2 - 1}{\epsilon}\right] = St\left[\frac{1+2\epsilon+\epsilon^2-1}{\epsilon}\right]$$

$$St\left[\frac{2\epsilon+\epsilon^2}{\epsilon}\right] = St\left[2+\epsilon\right] = 2$$

Esempi introduttivi



"...si divida per ε e sia diminuita la quantità ε all'infinito e trascurati i termini evanescenti…"

Methodus fluxionum serie infinitarum I. Newton

LA DERIVATA

$$D\left(f\left(x_0\right)\right)=St\left[\frac{df\left(x\right)}{dx}\right]=St\left[\frac{f\left(x_0+dx\right)-f\left(x_0\right)}{dx}\right]$$

Esempi di uso della relazione di indistinguibilità nel calcolo della parte standard: la derivata

$$f(x)=\frac{1}{x} \qquad x_0=2$$

$$\frac{1}{\delta}\cdot\left(\frac{1}{2+\delta}-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{\delta}\left(\frac{-\delta}{2(2+\delta)}\right)=\frac{-1}{2(2+\delta)}\sim-\frac{1}{4}$$

$$St\left[\frac{1}{\delta}\cdot\left(\frac{1}{2+\delta}-\frac{1}{2}\right)\right]=-\frac{1}{4}$$

Esempi di uso della relazione di indistinguibilità nel calcolo della parte standard: il comportamento asintotico

$$f(x)=\frac{1}{x^2-4}$$

$$f(2+\delta)=\frac{1}{(2+\delta)^2-4}=\frac{1}{4+4\cdot\delta+\delta^2-4}=\frac{1}{4\cdot\delta+\delta^2}\sim\frac{1}{4\cdot\delta}$$

$$f(2+\delta)\sim\frac{1}{4\cdot\delta}$$

$f(2+)=+\infty$

Parte standard

Ogni monade contiene al più un numero standard.

Ogni numero finito può essere scritto in modo unico nella forma

$x = s + \delta$ con $s \in \mathbb{R}$ e $\delta \in mon(0)$

s si chiama *parte standard* di x

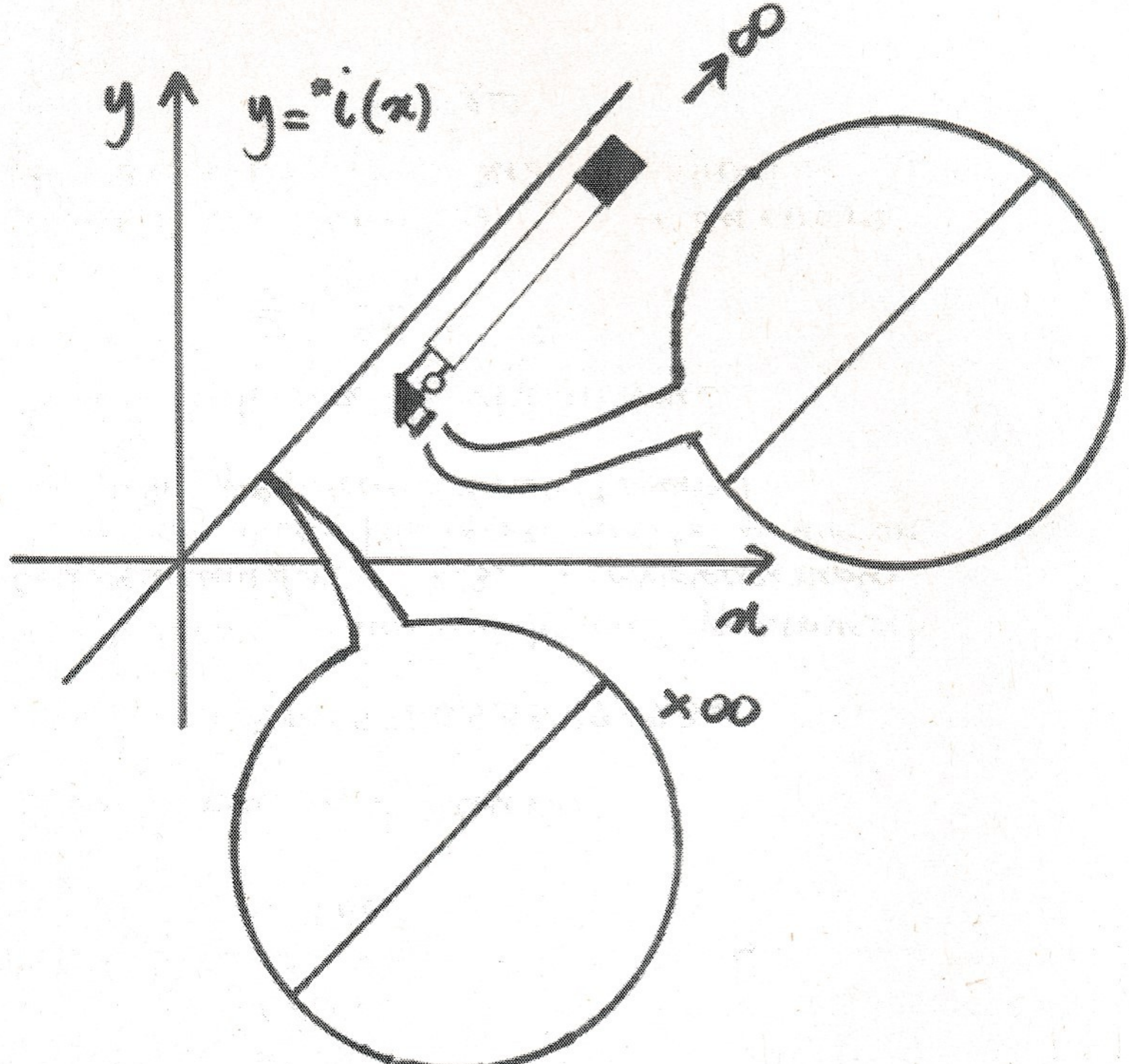
$$s = St[x]$$

Accettiamo che di ogni funzione $f : A \to \mathbb{R}$ esista l'estensione iperreale $\tilde{f} : \tilde{A} \to \tilde{\mathbb{R}}$

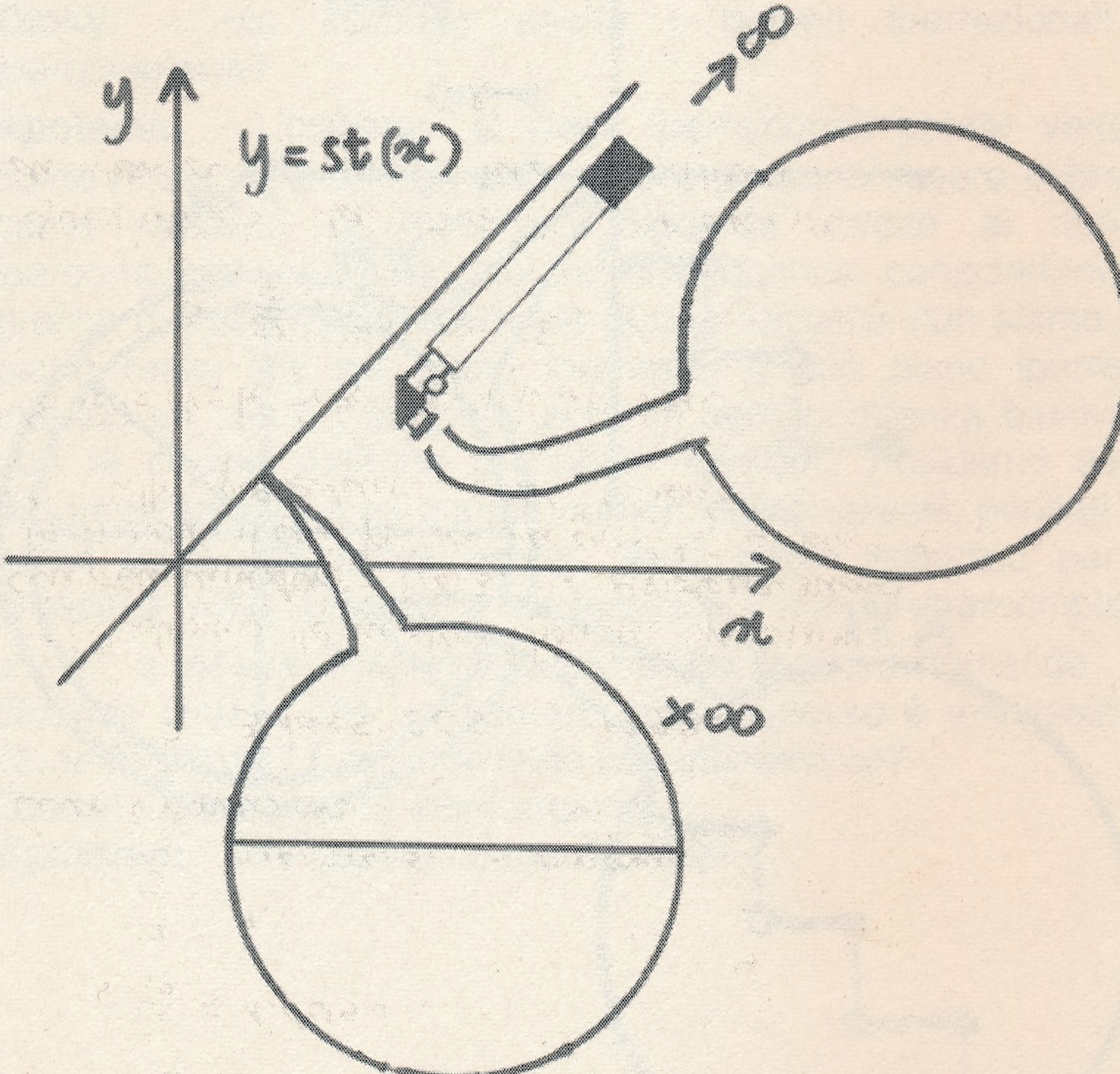
Che va dall'estensione iperreale di A all'estensione iperreale di R e tale che

$$f(x) = \tilde{f}(x)$$ per tutti gli x di A

Questo ci permette di scrivere sen(ε) oppure ln(M).



y
y = *i(x)
→∞
x
×∞



y
$y = st(x)$
$\to \infty$
x
$\times \infty$

Esempi di uso della relazione di indistinguibilità nel calcolo della parte standard: il comportamento asintotico

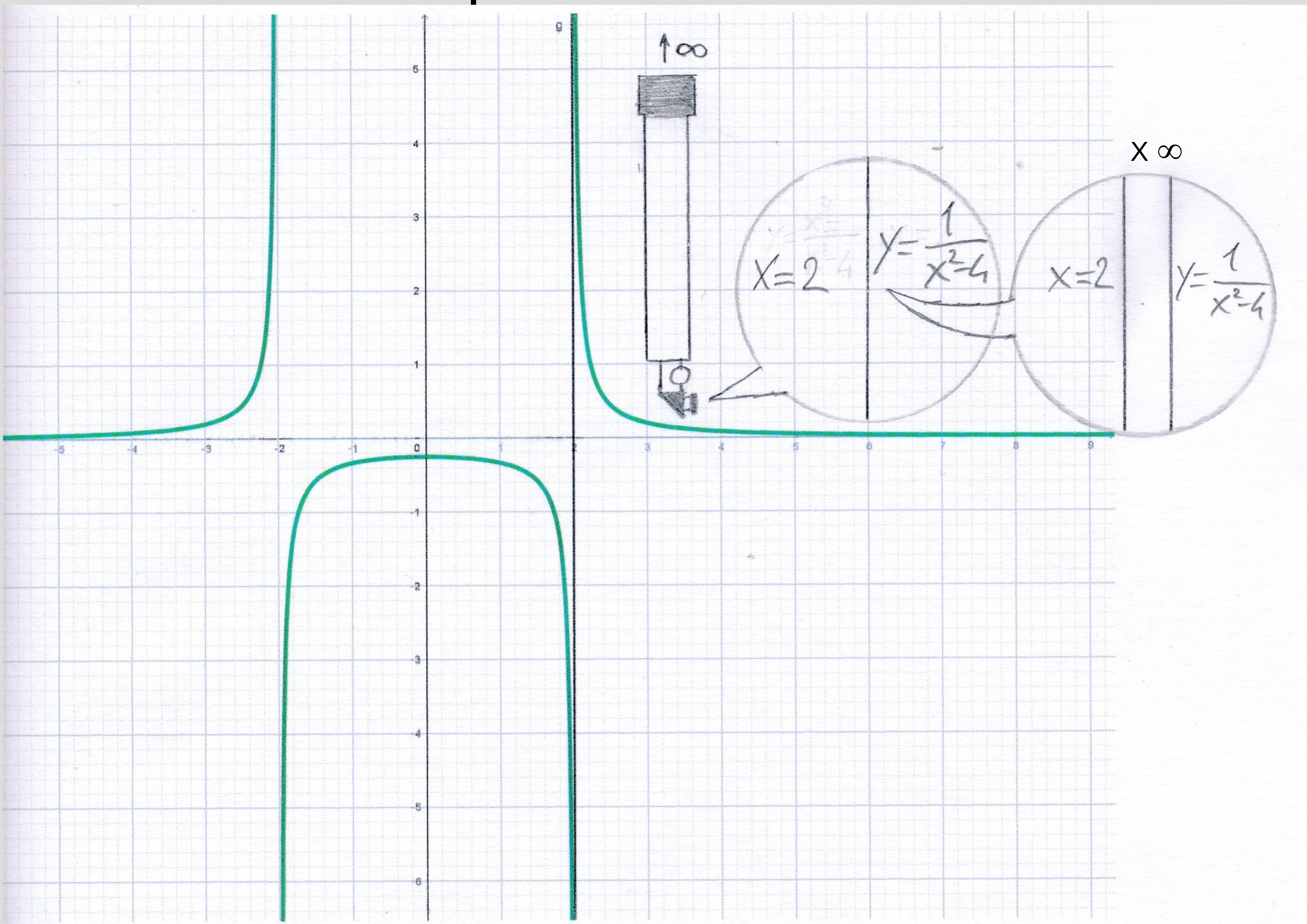
$$f(x)=\frac{1}{x^2-4}$$

$$f(2+\delta)=\frac{1}{(2+\delta)^2-4}=\frac{1}{4+4\cdot\delta+\delta^2-4}=\frac{1}{4\cdot\delta+\delta^2}\sim\frac{1}{4\cdot\delta}$$

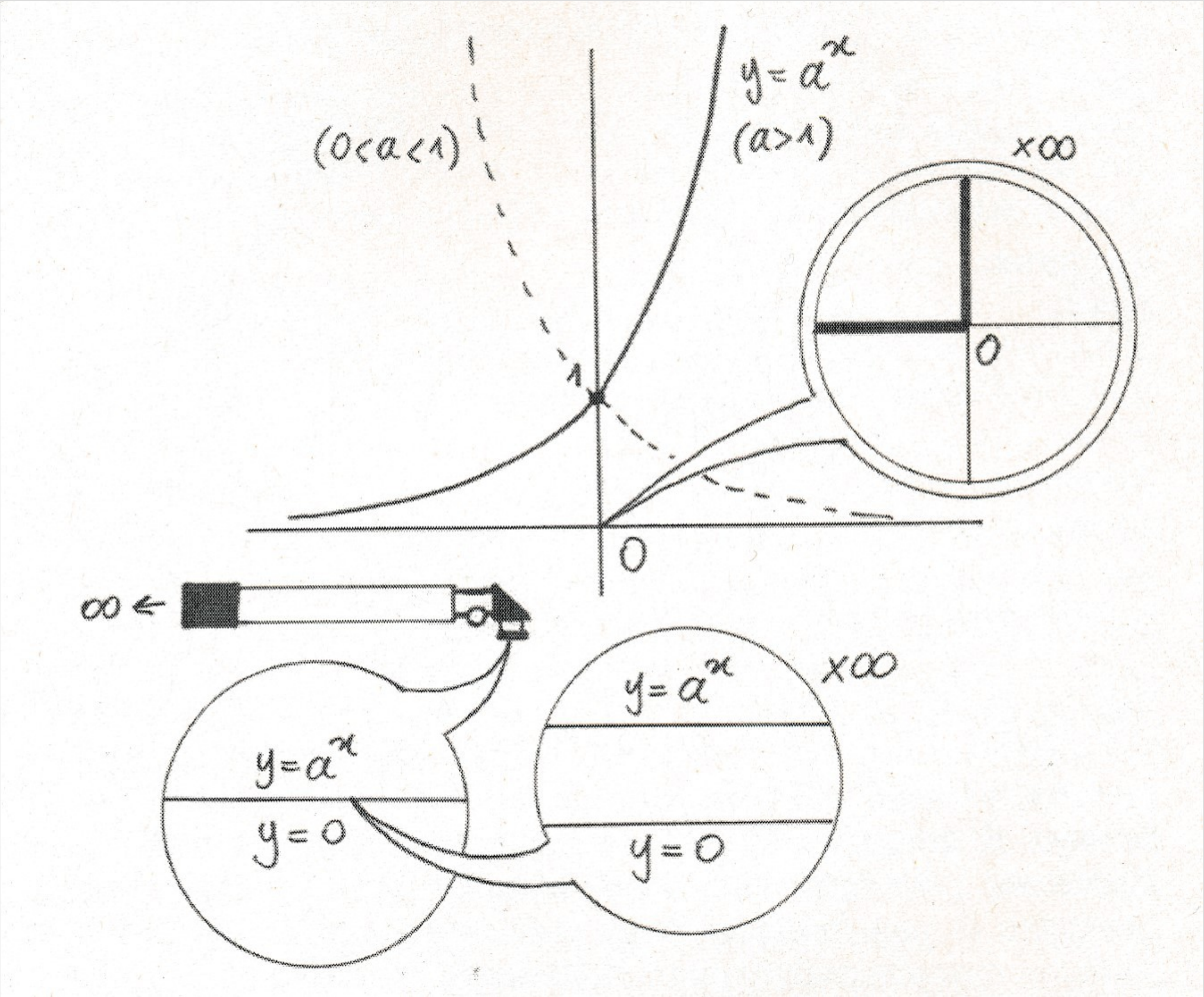
$$f(2+\delta)\sim\frac{1}{4\cdot\delta}$$

f(2+)=+∞

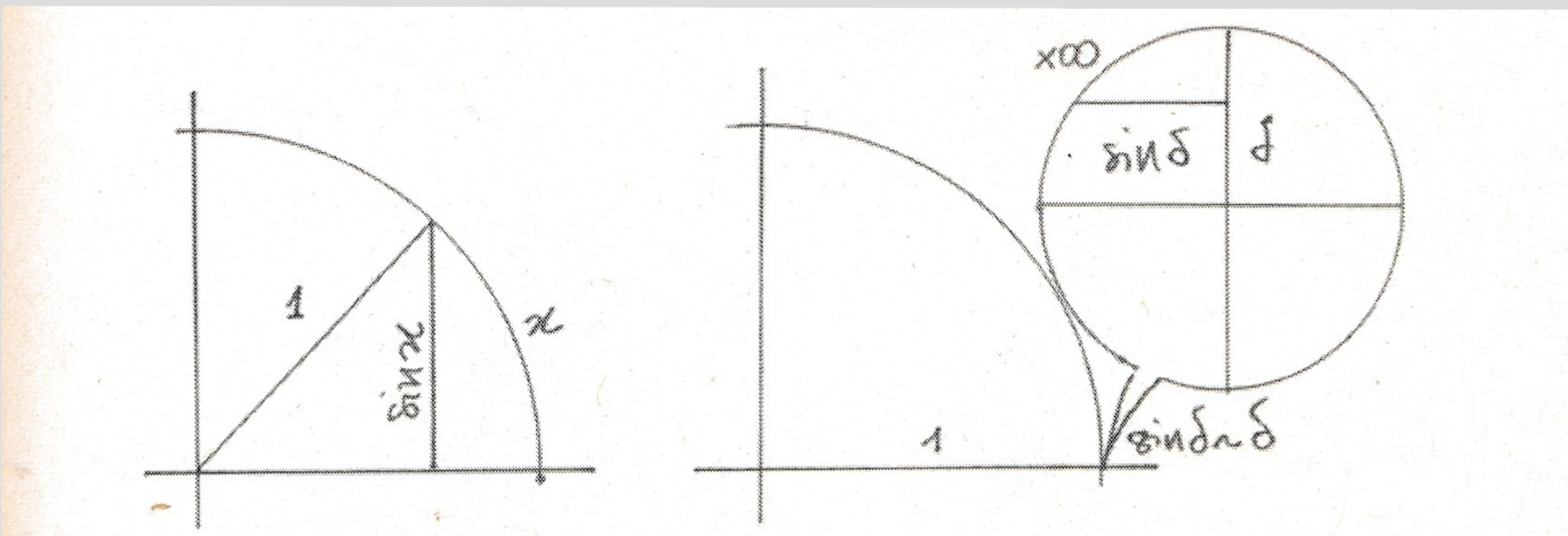
Il comportamento asintotico



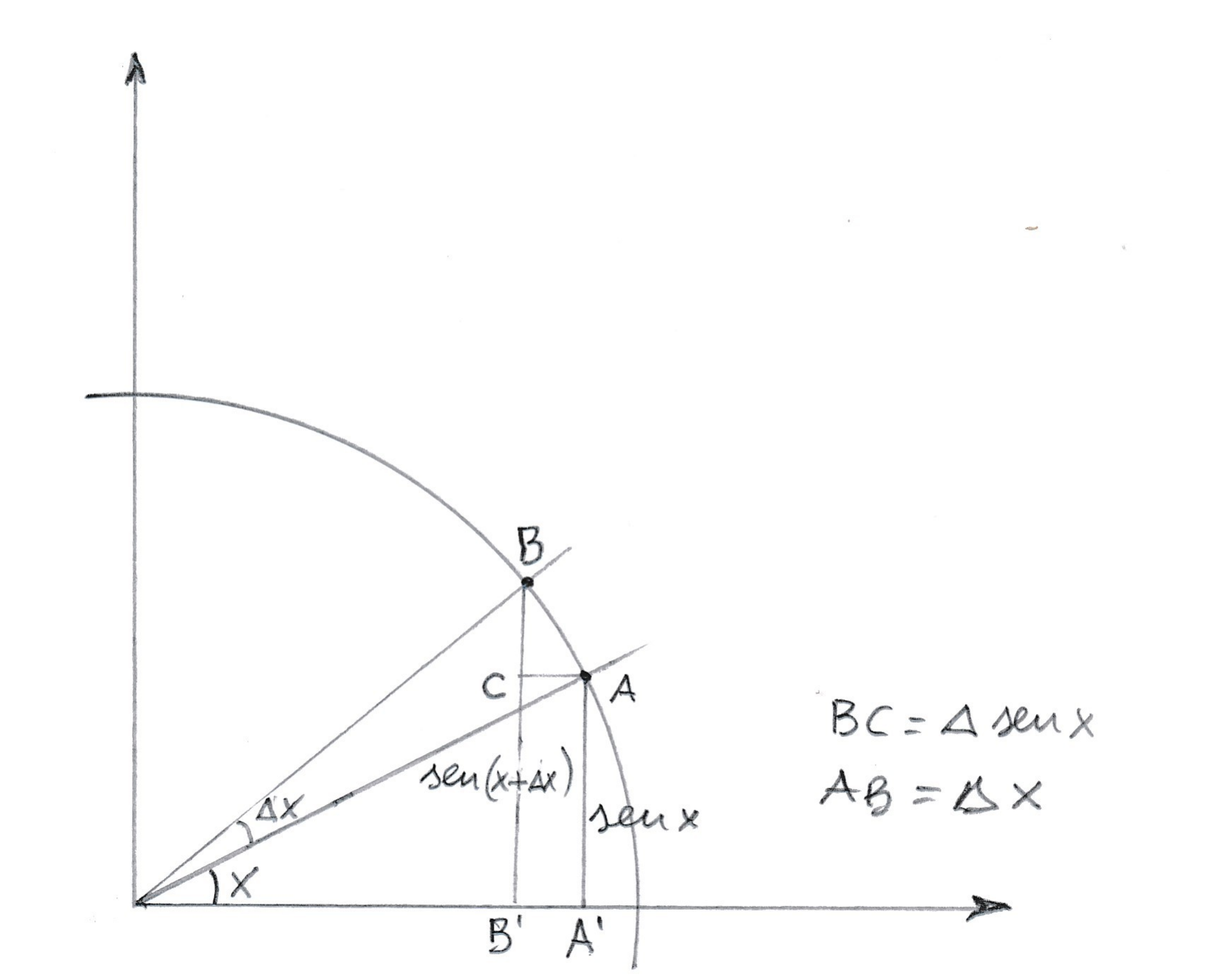
Il comportamento asintotico



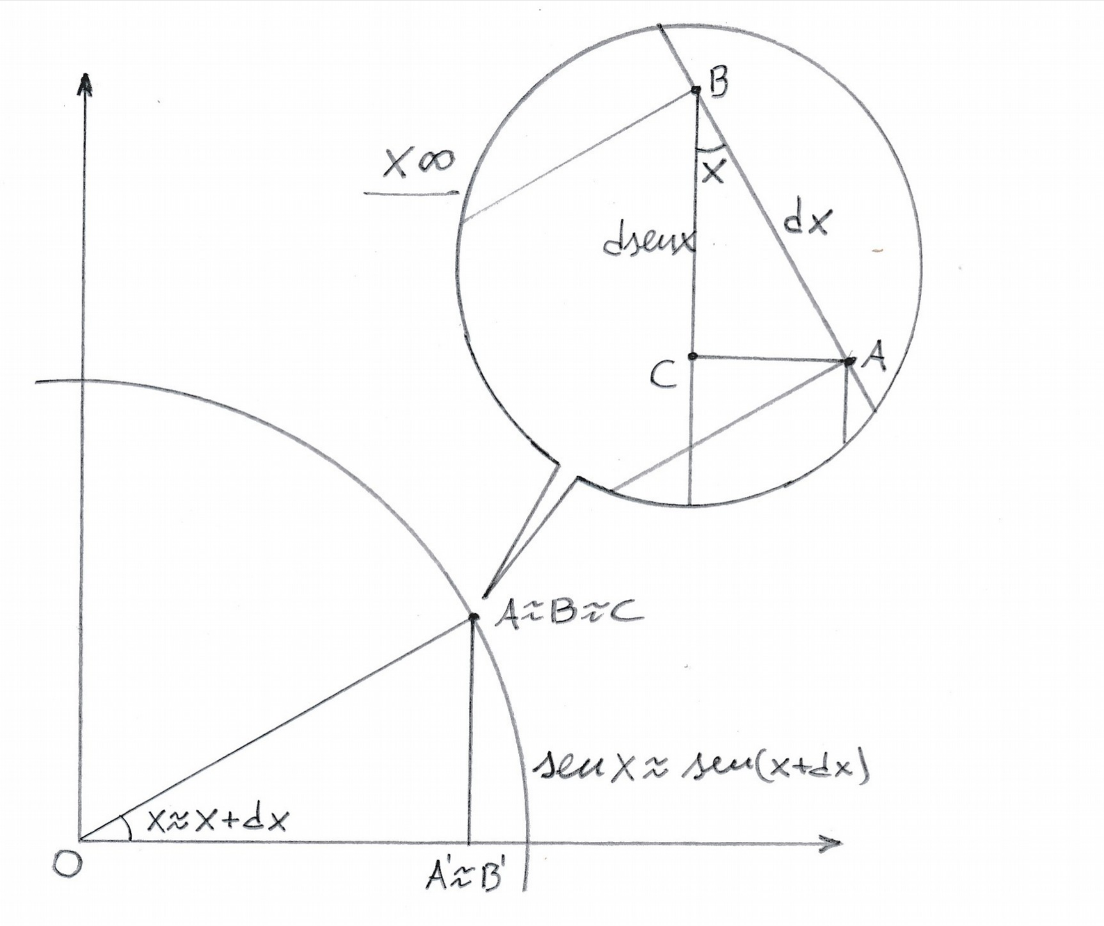
Funzioni goniometriche



Funzioni goniometriche



Funzioni goniometriche



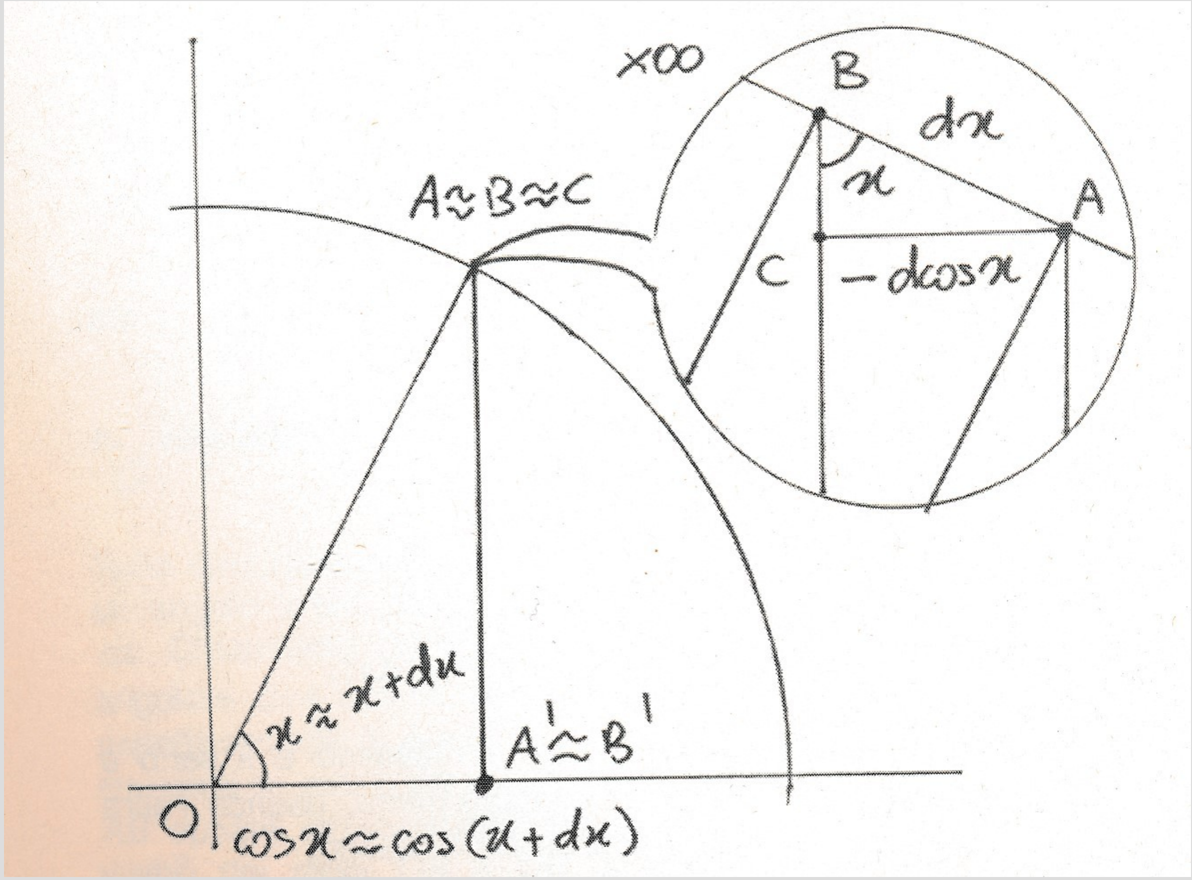
$$AB = dx \qquad ABC = x$$

$$BC = sen(x+dx) - sen(x) = d\,sen(x)$$

$$d\,sen(x) = dx \cdot \cos(x)$$

$$\frac{d\,sen(x)}{dx} = D[sen(x)] = \cos(x)$$

Funzioni goniometriche



$$AC = AB \cdot sen(x)$$

$$-d\cos(x) = dx \cdot sen(x)$$

$$\frac{d\cos(x)}{dx} = -sen(x)$$

$$D[\cos(x)] = -sen(x)$$

Regola di De L'Hôpital

$y = f(x) \qquad f(+\infty) = +\infty$

$z = g(x) \qquad g(+\infty) = +\infty$

se $\quad \dfrac{f'(+\infty)}{g'(+\infty)} \approx s \quad$ allora $\quad \dfrac{f(+\infty)}{g(+\infty)} \approx s$

Regola di De L'Hôpital

$$y=f(x) \qquad f(+\infty)=+\infty$$

$$z=g(x) \qquad g(+\infty)=+\infty$$

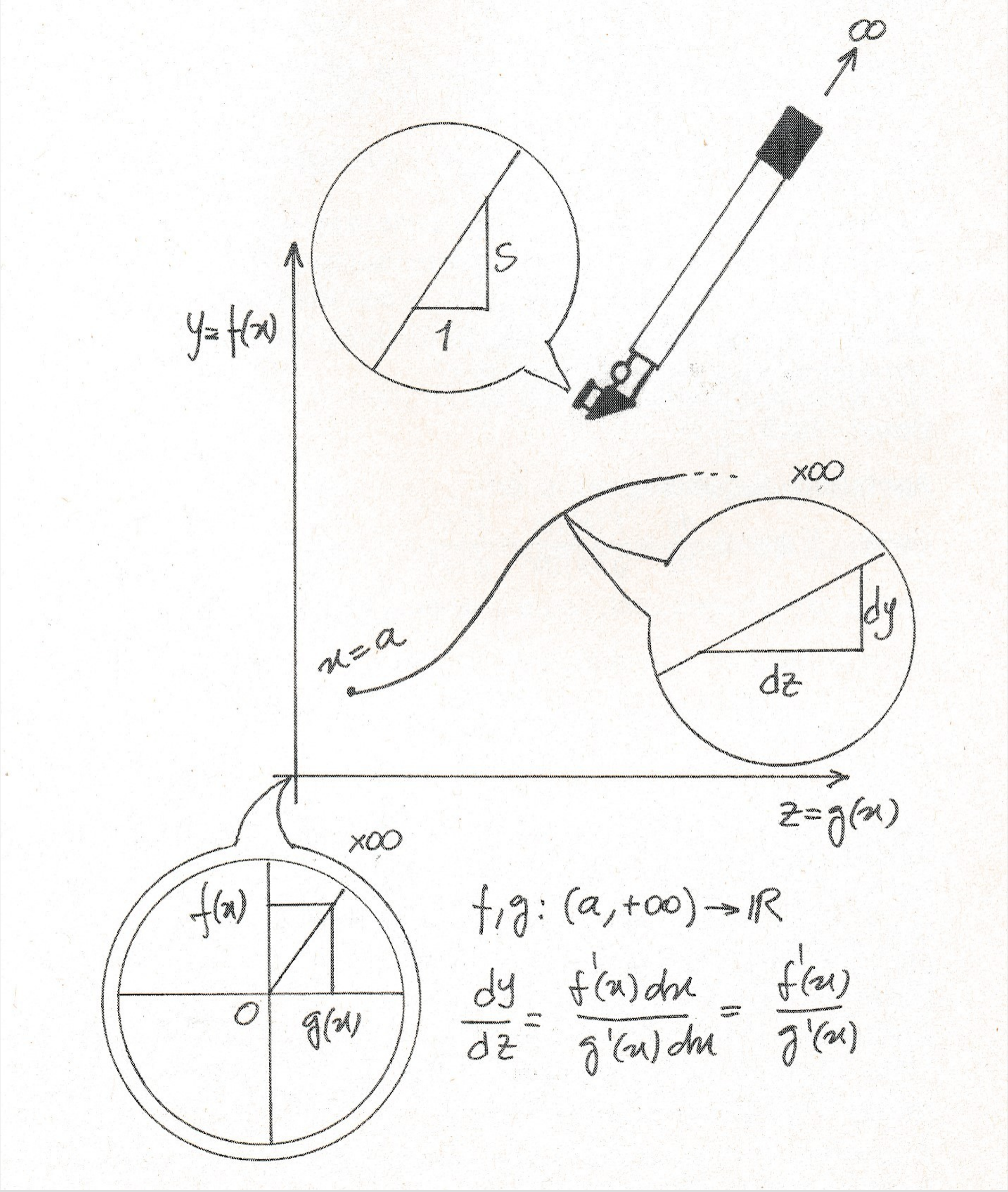
Entrambe derivabili e con g'(x)>0

$$\frac{f'(+\infty)}{g'(+\infty)} \approx s$$

$$\frac{dy}{dz}=\frac{\frac{dy}{dx}}{\frac{dz}{dx}}=\frac{f'(x)}{g'(x)}$$

$$\frac{f(+\infty)}{g(+\infty)} \approx s$$

Consideriamo il punto di coordinate (z;y)



Il numero di Nepero

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

Il numero di Nepero

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$e = \left(1 + \frac{1}{N} \right)^N$$

N ipernaturale infinito

Il numero di Nepero

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$e = \left(1 + \frac{1}{N} \right)^N$$

N ipernaturale infinito

$$e = \left(1 + dx \right)^{\frac{1}{dx}}$$

dx infinitesimo non nullo

Il numero di Nepero

$$e = \lim_{n \to \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n$$

$$e = \left(1 + \frac{1}{N} \right)^N$$

N ipernaturale infinito

$$e = \left(1 + dx \right)^{\frac{1}{dx}}$$

dx infinitesimo non nullo

$$e^{dx} = 1 + dx$$

La funzione esponenziale

$$y = e^x$$

La funzione esponenziale

$$y = e^{x}$$

$$D\left[e^{x}\right] = \frac{e^{x+dx} - e^{x}}{dx} = \frac{e^{x} \cdot e^{dx} - e^{x}}{dx} = \frac{e^{x}\left(e^{dx} - 1\right)}{dx}$$

La funzione esponenziale

$$y = e^x$$

$$D[e^x] = \frac{e^{x+dx} - e^x}{dx} = \frac{e^x \cdot e^{dx} - e^x}{dx} = \frac{e^x(e^{dx} - 1)}{dx}$$

Ricordando che $e^{dx} = 1 + dx$

La funzione esponenziale

$$y = e^{x}$$

$$D\left[e^{x}\right] = \frac{e^{x+dx} - e^{x}}{dx} = \frac{e^{x} \cdot e^{dx} - e^{x}}{dx} = \frac{e^{x}\left(e^{dx} - 1\right)}{dx}$$

Ricordando che $e^{dx} = 1 + dx$

$$\frac{e^{x}\left(1 + dx - 1\right)}{dx} = \frac{e^{x}\,dx}{dx} = e^{x}$$

Funzione composta

$$z = g(x) \qquad z' = \frac{dz}{dx}$$

$$y = f(z) \qquad y' = \frac{dy}{dz}$$

$$y = f(g(x)) \qquad y' = \frac{dy}{dx} = \frac{dy}{dz} \cdot \frac{dz}{dx}$$

Funzione composta

$$y=e^{\frac{1}{x}}$$

$$z=\frac{1}{x} \qquad \frac{dz}{dx}=-\frac{1}{x^2}$$

$$y=e^z \qquad \frac{dy}{dz}=e^z$$

$$y'=\frac{dy}{dx}=\frac{dy}{dz}\cdot\frac{dz}{dx}=e^z\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=-\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}$$

Funzione inversa

$$y = f(x) \qquad y' = \frac{dy}{dx}$$

$$x = f^{-1}(y) \qquad x' = \frac{dx}{dy}$$

$$\frac{dy}{dx} \cdot \frac{dx}{dy} = 1 \qquad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{\frac{dy}{dx}}$$

Derivata del logaritmo

$$y = \ln(x) \qquad \frac{dy}{dx} = ¿$$

$$x = e^{y} \qquad \frac{dx}{dy} = e^{y}$$

$$D[\ln(x)] = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}}$$

Derivata del logaritmo

$$y = \ln(x) \qquad \frac{dy}{dx} = ¿$$

$$x = e^y \qquad \frac{dx}{dy} = e^y$$

$$D[\ln(x)] = \frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{e^y} = \frac{1}{x}$$