Paolo Bonavoglia 2019

ΖΉΝΩΝ Ὁ ἘΛΕΆΤΗΣ

In principio era Zenone di Elea

Il primo e il terzo paradosso di Zenone

Alle radici del calcolo infinitesimale

Venezia 3-aprile-2019
IIS Algarotti

Zenone di Elea, dove è Elea?

Grecia?
Asia Minore?

Elea, Magna Grecia?

Magna Grecia
Italia meridionale
Provincia di Salerno, sotto Eboli e Paestum
Oggi si chiama **Velia**

Il III paradosso, della freccia

Zenone sbaglia a ragionare quando sostiene che la freccia scagliata è immobile. […] Questo è falso perché il tempo come del resto ogni altra grandezza non si compone di istanti indivisibili

Il terzo è quello, appena menzionato, della freccia che, se pur scagliata sta ferma. Ma una siffatta conclusione dipende dall'assunzione che il tempo sia costituito da istanti: se non si concede questo il ragionamento non tiene. [Aristotele, *Fisica* VI.9]

Se l'istante ha durata indivisibile (zero) allora anche lo spostamento è zero e l'aereo è immobile.

III paradosso, ha senso lo zero come misura?

Ma nella foto ***istantanea*** …

in realtà è $\Delta t = \frac{1}{800} sec$ e $\Delta s = 7\ cm$

Ma è possibile una foto veramente ***istantanea??***

Con $\Delta t = 0\ sec$??

e $\Delta s = 0\ cm$??

(aereo immobile?)

Con $\Delta t = 0\ sec$

La foto sarebbe assolutamente

buia, nera

Il III paradosso, della freccia

Δt = 0 → Δs = 0 → velocità zero??

Peggio, la velocità:

$$v = \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{0}{0}$$

è indeterminata!

Il problema della velocità istantanea portò Newton
a creare il calcolo infinitesimale.

Il problema equivale a quello della tangente a una curva, che portò a sua volta Leibniz a creare un calcolo infinitesimale equivalente a quello di Newton

Perché nell'istante non è possibile né muoversi né star fermi. [Aristotele, *Fisica* VI.8]

Infinitesimo al posto dello zero

Con Leibniz e Newton sostituiamo l'istante con un tempo ***infinitamente piccolo: dt*** (***infinitesimo)*** tale che:

$$\mathbf{0 < dt < \frac{1}{N}}$$

e uno spazio percorso ***infinitamente piccolo: ds***

$$0 < ds < \frac{1}{N}$$

E ammettiamo che per questi numeri infinitesimi si conservino le ordinarie regole dell'algebra (Principio di estensione *Transfer Principle*)

Allora la velocità istantanea è:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

E, se si conosce la legge oraria (la funzione) si può calcolare con le regole dell'algebra

Calcolo con gli infinitesimi (Newton, fisica)

Allora la velocità istantanea è:

$$v = \frac{ds}{dt}$$

E, se si conosce la legge oraria (la funzione) si può calcolare con le regole dell'algebra

$$v = 2kt$$

Ma dt è un infinitesimo e nel calcolo della velocità possiamo trascurarlo

Per esempio, un corpo in caduta libera come Galileo verificò sul piano inclinato ha un moto nel quale gli spazi percorsi sono proporzionali ai quadrati dei tempi. In formule …

$$s = kt^2$$

Ora supponiamo di incrementare lo spazio di un infinitesimo ds in un tempo infinitesimo dt, quindi

$$s + ds = k(t + dt)^2$$

E quindi calcolando con le ordinarie regole dell'algebra:

$$\cancel{s} + ds = \cancel{kt^2} + 2ktdt + kdt^2$$

$$ds = 2ktdt + kdt^2$$

E quindi dividendo per il tempo infinitesimo dt:

$$v = 2kt + \cancel{k\,dt}$$

Calcolo con gli infinitesimi (Leibniz geometria)

Prendiamo ad esempio, l'equazione di una parabola…

$$y = x^2$$

Ora supponiamo di incrementare lo spazio di un infinitesimo ds in un tempo infinitesimo dt, quindi

$$y + dy = (x + dx)^2$$

E quindi calcolando con le ordinarie regole dell'algebra:

$$\cancel{y} + dy = \cancel{x^2} + 2xdx + dx^2$$

$$dy = 2xdx + dx^2$$

E quindi dividendo per il tempo infinitesimo dt:

$$\frac{dy}{dx} = 2x + \cancel{dx}$$

$$\frac{dy}{dx} = 2x$$

Numeri infinitesimi o infinitamente piccoli

dx

È un numero infinitamente piccolo o infinitesimo; per definizione un infinitesimo positivo deve soddisfare le due seguenti condizioni:

$dx > 0$

Essere maggiore di zero, e quindi diverso da zero.

$dx < \frac{1}{N}$

Essere minore di un qualsiasi reale positivo, per quanto piccolo.

Tra i numeri reali non esistono numeri con queste proprietà; sono esclusi del postulato di Archimede.
Gli infinitesimi sono quindi **numeri non archimedei**

Simboli infinitesimi

dx, dy, dz, dt Simboli di Leibniz, utili nel calcolo delle derivate …

$\delta, \epsilon, \zeta, \eta$ Lettere greche minuscole.

0 Doppio cerchietto

Numeri iperreali e parte standard

$z = 2x + dx$

È un numero iperreale, somma di una parte reale e di una parte infinitesima

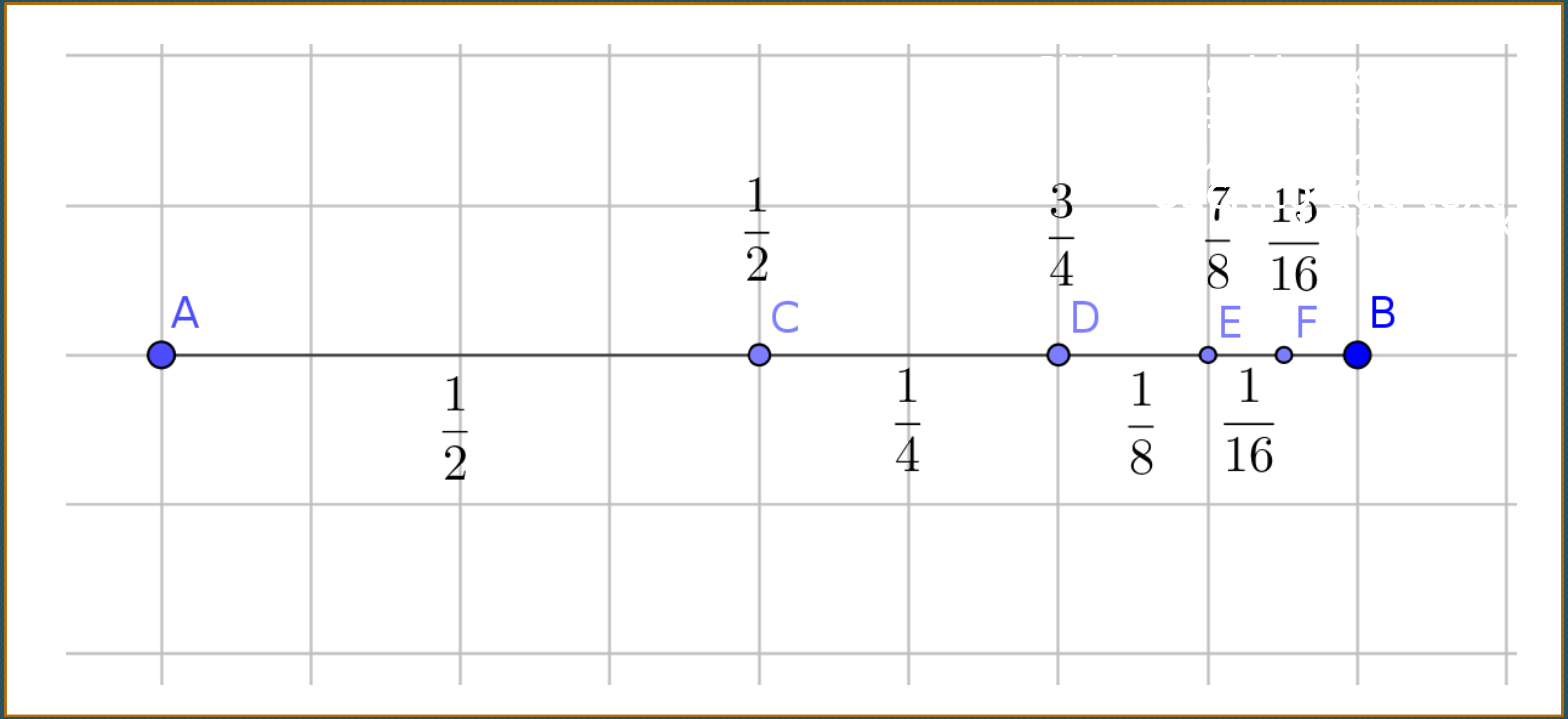
$$2x = st(z) = st(2x + dx)$$

St(z) è una funzione detta **parte standard** che ad ogni numero iperreale associa il numero reale che gli è infinitamente vicino, nel senso che la differenza è infinitesima.
Si può scrivere così:

$$2x \backsimeq 2x + dx$$

I paradosso: la dicotomia

Ci sono quattro argomenti di Zenone sul movimento che mettono in difficoltà chi tenta di risolverli.
Il primo riguarda l'inesistenza del movimento, perché il mobile prima di arrivare alla fine del tragitto deve passare per la metà di esso. [Aristotele, *Fisica* VI.9]



Achille parte da A ma
non arriverà mai in B

Infatti deve prima raggiungere la metà di AB
Poi la metà del rimanente
E così via all'infinito

Achille non arriverà mai in B

Tra A e B ci sono infiniti punti …
Ma anche tra A e C

La dicotomia: enunciati alternativi

Achille non riesce neanche a partire

Infatti non può raggiungere la metà, e nemmeno il quarto e nemmeno l'ottavo ...

Non uscirò mai da questa aula

Infatti dovrò prima raggiungere la metà della distanza dalla porta, e poi metà del rimanente …

Questo convegno non avrà mai fine

Infatti, se mancano sette ore alla fine, dobbiamo prima arrivare a 3h30m dalla fine, poi a 1h45m …

La dicotomia: come si spiega?

Interpretazione fisica

non è possibile la suddivisione all’infinito (atomi, quanti)

Se Achille percorre spazi uguali in tempi uguali, il paradosso vale anche per il tempo …

Interpretazione geometrica

Un segmento non è un insieme di punti indivisibili (Aristotele)

La dicotomia aritmetica

Matematicamente è una questione di numeri

Tra due numeri razionali ce ne è sempre uno maggiore del primo e minore del secondo,
Geometricamente tra due punti di una retta ce ne è sempre un terzo compreso.

Il paradosso piò descriversi con tre sequenze di numeri

Strada mancante ad Achille: $< 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots > = \delta$

Strada percorsa da Achille: $< 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16} \ldots > = \alpha$

Posizione di B : $< 1, 1, 1, 1, 1 \ldots > = 1$

La dicotomia aritmetica

Matematicamente è una questione di numeri

Tra due numeri razionali ce ne è sempre uno maggiore del primo e minore del secondo,
Geometricamente tra due punti di una retta ce ne è sempre un terzo compreso.

Il paradosso piò descriversi con tre sequenze di numeri, che definiscono alcuni ***numeri iperreali***

Strada mancante ad Achille: $< 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots > = \delta$ Numero iperreale infinitamente piccolo

Strada percorsa da Achille: $< 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16} \ldots > = \alpha$ Numero iperreale infinitamente vicino ad 1

Posizione di B : $< 1, 1, 1, 1, 1 \ldots > = 1$ Numero iperreale stabile = numero reale = 1

Ma gli iperreali possono dirsi numeri?

Per parlare di **numeri** occorre che abbia senso sommarli, moltiplicarli, confrontarli

I numeri del telefono in questo senso non sono numeri …

I numeri iperreali invece si possono sommare e moltiplicare facilmente, termine a termine

Strada mancante ad Achille: $< 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ \ldots > = \ \delta$

Posizione di Achille: $< 0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16} \ \ldots > = \ \alpha$

Posizione di B: $< 1, 1, 1, 1, 1 \ \ldots > = \ 1$

Somma

$$\alpha + \delta = \ 1$$

Sottrazione

$$\alpha = 1 - \delta$$

Aritmetica iperreale: il confronto

Più problematico confrontare numeri; si usa una regola della maggioranza.

Esempio: $\alpha < 1$ infatti è $0, \frac{1}{2}, \frac{3}{4}, \frac{7}{8}, \frac{15}{16} \ldots < 1,1,1,1,1 \ldots$ unanimità

Esempio: $\delta > 0$ infatti è $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots > 0,0,0,0,0 \ldots$ unanimità

Esempio: $\delta < \frac{1}{4}$ infatti è $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{1}{8}, \frac{1}{16} \ldots < \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \frac{1}{4} \ldots$ maggioranza infinita

(falsa per le prime 3, vera per tutte le altre)

E se capita infinito contro infinito? $0,1,0,1,0,1 \ldots < 1,0,1,0,1,0 \ldots$???

Ci vuole un insieme di regole: un ultrafiltro!

Aritmetica iperreale: l’uguaglianza

Può apparire strana l’uguaglianza tra iperreali in base a questa regola della maggioranza (o dell’ultrafiltro):

Esempio: $< 1,1,1,1,1,1\ \ldots >\ =\ < 1,1,1,1,1,1\ \ldots >$ unanimità

Esempio: $< 1,1,1,1,1,1\ \ldots >\ =\ < 3,7,3,1,1,1\ \ldots >$ maggioranza infinita

Esempio: $< 1,1,1,1,1,1\ \ldots >\ =\ < 0,1,0,1,0,1\ \ldots >$???? Come ne usciamo?

Aritmetica iperreale: l'ultrafiltro

Può apparire strana l'uguaglianza tra iperreali in base a questa regola della maggioranza (o dell'ultrafiltro):

Esempio: $< 1,1,1,1,1,1\ \ldots > \; = \; < 1,1,1,1,1,1\ \ldots >$ unanimità

Esempio: $< 1,1,1,1,1,1\ \ldots > \; = \; < 3,7,3,1,1,1\ \ldots >$ maggioranza infinita

Esempio: $< 1,1,1,1,1,1\ \ldots > \; = \; < 0,1,0,1,0,1\ \ldots >$ maggioranza **ultrafiltro**, se prevalgono le posizioni pari, cioè se P appartiene all'ultrafiltro.

A questo punto un numero iperreale può essere definito come la **classe di equivalenza** associata a questa relazione di uguaglianza tra sequenze.
Un po' come il numero razionale $\frac{1}{2} = 0.5$ può essere definito come la classe di equivalenza delle frazioni equivalenti

Questi infinitesimi sono gli stessi visti prima?

Definiti il numero iperreale, infinitamente grande, fondamentale:

$\omega = < 1, 2, 3, 4, 5 \ldots >$ (Cantor??? secondo Benci α = 1+1+1+…)

E il suo reciproco, numero infinitesimo, fondamentale:

$\varepsilon = < 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots > \; = \frac{1}{\omega}$ (secondo Benci η)

$\varepsilon > 0$ infatti è $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5} \ldots \; > 0,0,0,0,0 \ldots$ unanimità

$\forall N : \; \varepsilon < \frac{1}{N}$ infatti è $1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3} \ldots \frac{1}{N} \ldots < \frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \frac{1}{N}, \frac{1}{N} \ldots$ maggioranza infinita

Aritmetica iperreale: le funzioni

Come per le operazioni tra iperreali si estende il concetto di funzione, la funzione di argomento iperreale sarà definita dalla sequenza di funzioni:

Esempio: radice quadrata di omega: $< 1, \sqrt{2}, \sqrt{3}, 2, \sqrt{5} \ldots >$

Esempio: logaritmo in base di omega: $< 0, 1, \log_2 3, 2, \log_2 5 \ldots >$

Un esempio: il numero *e* (di Nepero)

$$C = C_0(1+t)^n$$

Legge dell'interesse composto

$$(1+1)^1 = 2$$

Raddoppio del capitale dopo un periodo
(tasso 100% dopo un periodo)
Se invece pago due cedole del 50% a metà periodo

$$\left(1+\frac{1}{2}\right)^2 = 1.5^2 = 2.25$$

Conviene!!! Ma cresce all'infinito o è limitata

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 1.1^{10} = 2.5937\ldots$$

Un esempio: il numero *e* approssimato con Excel

Usando un foglio di calcolo è facile vedere che il valore di

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

per n = <1,2,3 …> si avvicina sempre più a un numero le cui prime cifre sono 2,718281808 …

In rosso: un curioso errore di Excel, che poi si corregge da solo; causa probabile: l'algoritrmo evita di rifare il calcolo se ritiene che non vi sia più cambiamento.
O che altro?

n	t				
0	#DIV/0!		1	0	#DIV/0!
1	2		2	1	2,000000000000000
2	2,25	1,125	2,5	2	2,250000000000000
3	2,37037	1,053498	2,666666666666670	4	2,441406250000000
4	2,441406	1,029968	2,708333333333330	8	2,565784513950340
5	2,48832	1,019216	2,716666666666670	16	2,637928497366600
6	2,521626	1,013385	2,718055555555560	32	2,676990129378180
7	2,5465	1,009864	2,718253968253970	64	2,697344952565100
8	2,565785	1,007573	2,718278769841270	128	2,707739019688020
9	2,581175	1,005998	2,718281525573190	256	2,712991624253420
10	2,593742	1,004869	2,718281801146380	512	2,715632000168990
11	2,604199	1,004031	2,718281826198490	1024	2,716955729466430
12	2,613035	1,003393	2,718281828286170	2048	2,717618482336840
13	2,620601	1,002895	2,718281828446760	4096	2,717950081189630
14	2,627152	1,0025	2,718281828458230	8192	2,718115936266050
15	2,632879	1,00218	2,718281828458990	16384	2,718198877721640
16	2,637928	1,001918	2,718281828459040	32768	2,718240351930030
17	2,642414	1,001701	2,718281828459050	65536	2,718261089903880
18	2,646426	1,001518	2,718281828459050	131072	2,718271459108380
19	2,650034	1,001364	2,718281828459050	262144	2,718276643766680
20	2,653298	1,001231	2,718281828459050	524288	2,718279236118500
21	2,656263	1,001118	2,718281828459050	1048576	2,718280532275660
22	2,65897	1,001019	2,718281828459050	2097152	2,718281180364030
23	2,66145	1,000933		4194304	2,718281504398580
24	2,663731	1,000857		8388608	2,718281666420750
25	2,665836	1,00079		16777216	2,718281747426800
26	2,667785	1,000731		33554432	2,718281787932380
27	2,669594	1,000678		67108864	2,718281808182470
28	2,671278	1,000631		134217728	2,718281808182470
29	2,672849	1,000588		268435456	2,718281808182470
30	2,674319	1,00055		536870912	2,718281808182470
				1073741824	2,718281808182470
				2147483648	2,718281808182470
				4294967296	2,718281828142600
				8589934592	2,718281828300820
				17179869184	2,718281828379930
				34359738368	2,718281828419490
				68719476736	2,718281828439270

Un esempio: il numero e : definizione

La sequenza dei valori di $\left(1+\frac{1}{N}\right)^N$ definisce un numero iperreale definito dalla sequenza

$$\eta = < 2, 2.25, 2.37, 2.44 \; \ldots >$$

Il numero reale e può essere allora definito come la parte standard di questo

$$e = st(\eta)$$

o anche come:

$$e = st\left((1+\varepsilon)^{\omega}\right)$$

Dove omega è il numero infinitamente grande fondamentale:

$$\omega = < 1, 2, 3, 4, 5 \ldots >$$

Ed epsilon il suo reciproco

Nell'analisi classica si scrive la stessa cosa, con notazione un po'più pesante:

$$e = \lim_{N \to \infty} (1+\frac{1}{N})^N$$

Il numero *e* : una proprietà

Ricordando che

$$\eta = (1+\varepsilon)^{\omega}$$

Domanda: quanto vale η^{ε}?

$$\eta^{\varepsilon} = \left((1+\varepsilon)^{\omega}\right)^{\varepsilon} = (1+\varepsilon)^{\omega\varepsilon} = 1+\varepsilon$$

Da notare che questo risultato vale anche usando un qualsiasi infinitesimo δ anche diverso da ε, quindi $\delta = k\epsilon$

E ***ammettendo*** che il binomio di Newton valga anche per gli iperreali:

$$\eta^{\delta} = \left((1+\varepsilon)^{\omega}\right)^{\delta} = (1+\varepsilon)^{\omega k\varepsilon} = (1+\varepsilon)^{k} = 1 + k\varepsilon + \cdots = 1 + \delta + \cdots$$

Dove i puntini indicano infinitesimi di ordine superiore.

Passando al mondo reale si può scrivere:

$$e^{\delta} \cong 1 + \delta$$

Derivata di e^x

Ricordando che è $f'(x) = st\left(\frac{f(x+dx)-f(x)}{dx}\right)$

e sostituendo $f(x)$ con e^x

$f'(x) = st\left(\frac{e^{x+dx}-e^x}{dx}\right) = st\left(\frac{e^x e^{dx}-e^x}{dx}\right) = st\left(\frac{e^x(e^{dx}-1)}{dx}\right)$

E ricordando che è

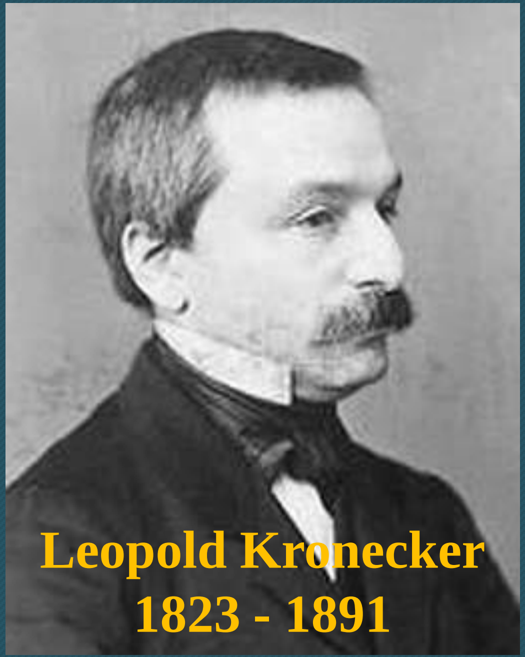
$$e^{dx} = 1 + dx$$

segue

$$f'(x) = st\left(\frac{e^x(e^{dx}-1)}{dx}\right) = st\left(\frac{e^x dx}{dx}\right) = e^x$$

Ma si può anche fare a meno della formula $\begin{cases} y = e^x \\ y + dy = e^{x+dx} \end{cases}$ $dy = e^{x+dx} - e^x$ ecc.ecc.

Ma esistono veramente i numeri iperreali?



Leopold Kronecker
1823 - 1891

Nel mondo reale non esistono grandezze infinitamente piccole o infinitamente grandi, quindi che non hanno significato!
Ma nel mondo reale nessuna distanza, nessun intervallo di tempo sarà mai esattamente radice di due, o uno, o due …

Se si accettano i numeri reali … non c’è motivo di dire di no agli iperreali.

Se si accetta l’esistenza di radice di due, perché non accettare anche quella di omega ed epsilon?

Leopold Kronecker riassunse i suoi dubbi con la celebre affermazione riportata a sinistra.

Die ganzen Zahlen hat der liebe Gott gemacht, alles andere ist Menschenwerk.

I numeri interi li ha creati il buon Dio, tutto il resto è opera dell‘uomo.

Insomma, se ci siamo abituati a cose strane come numeri negativi, numeri irrazionali, numeri immaginari, non c’è motivo di rifiutare i numeri iperreali

Grazie per l'attenzione!

Il seguito qui: Calcolo infinitesimale NSA

Bibliografia

ARISTOTELE, *Fisica*, vol. VI.9

V. BENCI , *Alla scoperta dei numeri infinitesimi*, Aracne, Roma, 2019

R. COURANT-H. ROBBINS , *Che cos'è la matematica*, Bollati Boringhieri, Torino, 2000

A CURA DI G.CANTELLI, *La disputa Leibniz-Newton sull'Analisi*, Bollati Boringhieri, Torino, 1958-2006

R. GOLDBLATT, *Lectures on the Hyperreals*, Springer, New York, 1998-1998

G. GOLDONI, *I numeri iperreali*, ilmiolibro.it, Roma, 2011-2011

G. GOLDONI, *Il calcolo delle differenze e il calcolo differenziale*, ilmiolibro.it, Roma, 2011-2011

G. GEYMONAT, *Note di matematica*, Politecnico di Torino, 1968

R. FERRAUTO, Lezioni di Analisi Matematica, Società editrice Dante Alighieri, Roma, 1983

J. HENLE - E. KLEINBERG, *Infinitesimal Calculus*, Dover, New York, 1979-2003

H. J. KEISLER, *Elementary Calculus: An Infinitesimal Approach*, Prindle, Weber &Schmidt Inc., Boston, 1976-2013 → eBook

M. KLINE, *Calculus - An Intuitive and Physical Approach*, Dover, Mineola, NY, 1977-1998

A. M. ROBERT, *Nonstandard Analysis*, Dover, New York, 1988-2003

A. ROBINSON, *Non Standard Analysis*, Princeton University Press, Princeton, 1965-1995